Praktisches Lehrbuch

der

Geometrie,

der ebenen und sphärischen

Trigonometrie,

mit ihren Anwendungen auf

Perspektive, Mechanik und Astronomie,

verfaßt von

Nikolaus Wilh. Schulze.

Mit 193 Abbildungen.

Zweite Stereotyp-Ausgabe.

Hamburg und New-York.
Verlag von Schuberth & Comp.
1851.

Vorwort.

Um bei der so großen Anzahl der trefflichen Werke über Geometrie in der neuesten Zeit vorliegendes Lehrbuch eines Platzes in der Literatur nicht ganz unwürdig zu lassen, suchte ich dasselbe durch Verbindung der Theorie mit Praxis zu möglichst zweckmäßiger Brauchbarkeit einzurichten und vorzüglich mit den fruchtbaren Anwendungen der sphärischen Trigonometrie auf die Astronomie in zahlreichen und interessanten Beispielen für die mannigfaltigsten Fälle auszustatten.

Mehrere Aufgaben hierüber habe ich aus „Paul Halke's Aufgaben, neu bearbeitet und herausgegeben für Freunde der Mathematik von J. Sievers,“ entlehnt und die Auflösung derselben, deren Resultat von dem Verfasser nur angezeigt ist, zur Erklärung meist vollständig auseinandergesetzt; und ich würde recht gern, wenn mir der Raum dieses Werkes

nicht zugemessen war, auch Probleme aus der Gnomonik in gleicher Weise aufgeführt haben.

Was die Anordnung der Lehrgegenstände betrifft, so habe ich in der ebenen Trigonometrie, um den Schüler mit den immer fort an einander gereiheten Entwickelungen von Formeln nicht zu ermüden, den größten Theil derselben nebst der auf sie sich gründenden Berechnung der trigonometrischen Tafeln, der Ausmessung der Dreiecke nachgesetzt.

Der Verfasser.

Zusätze.

Seite 85 zu 86. Aufgabe 8. Das Verhältniß der Vielecke dehnt sich auch mit auf den Kreis aus, so daß der Lehrsatz eigentlich so lauten muß: Wenn zwei oder mehrere regelmäßige Vielecke, so groß und so verschieden auch die Anzahl ihrer Seiten sein mag, um denselben Kreis beschrieben sind, so verhalten sich diese Figuren mit Inbegriff des Kreises ihrem Umfange nach eben so zu einander wie ihrem Flächeninhalte nach.

Seite 125. Aufgabe 3. Anmerkung. Der daselbst angedeutete Satz ist nachher wegen besonderer Umstände nicht in Ausführung gekommen; es sollte nämlich allgemein dargethan werden: Wenn sich zwei ähnliche Körper zu einander verhalten wie m zu n, so verhalten sich ihre Gesammtoberflächen wie $\sqrt[3]{m^2}$ zu $\sqrt[3]{n^2}$. Ich bemerke also, daß sich dieser Satz für ähnliche gerade Pyramiden erweisen läßt, also gilt er allgemein.

Seite 135. Aufgabe 13. Es läßt sich sonach auch erweisen, daß der um die Kugel beschriebene gleichseitige Cylinder sich dem Volumen nach oben so zur Kugel wie seine Gesammtoberfläche zur Oberfläche der Kugel verhält; daher der merkwürdige Satz: Wenn ein gleichseitiger Kegel und ein gleichseitiger Cylinder um dieselbe Kugel beschrieben sind, so verhalten sich diese drei Körper ihrem Volumen nach eben so zu einander wie ihren Oberflächen nach.

Ob diese drei Körper die einzigen sind, die ein solches Verhältniß gewähren, stelle ich einer anderweitigen Untersuchung anheim.

Seite 276. Aufgabt 68. Der gleichzeitige Aufgang, oder Untergang der Sonne für beide Orte bestimmt sich nach ihrer gleichnamigen Abweichung, d. h. entweder nach der nördlichen oder nach der südlichen. Welche aber für den einen oder den andern Fall zu nehmen sei, läßt sich durch die Beschaffenheit der Stundenwinkel entscheiden.

Man erhält für $+ d$, 1) $t = 131^\circ 52' 53''$; $t' = 122^\circ 37' 52''$
und für $- d$, 2) $t = 48^\circ 7' 7''$; $t' = 57^\circ 22' 8''$.

Für den Aufgang ist 3) $o = l + t - t' = 9^\circ 15' + t - t'$,
für den Untergang 4) $o = l + t' - t = 9^\circ 15' + t' - t$.

Die Bedingung der Gleichungen (3) und (4) wird aber nur dann erfüllt, wenn wir die Werthe aus (2) in (3) und die aus (1) in (4) setzen; also die Sonne geht beiden Orten zugleich auf, wenn sie eine südliche, und geht ihnen zugleich unter, wenn sie eine nördliche Abweichung hat.

Die Herleitung einer zweiten Formel aus (4) $o = l + t' - t$, d. h. aus dem Untergangsunterschiede, entscheidet deshalb nichts.

Seite 281. Aufgabe 75. Wenn die nördliche Abweichung eines Sterns der Aequatorhöhe, d. i. $= 90^\circ - p$ ist, so folgt $\cos t = - \operatorname{tg} p . \cot p = -1$, daher $t = 360^\circ$. Der Stern berührt also in der nördlichen Halbkugel den Horizont. Ist hingegen die Abweichung größer als die Aequatorhöhe, so erhält man für t unmögliche Werthe, welches so viel bedeutet, als: der Stern erreicht den Horizont nicht, d. h. er geht gar nicht unter.

Uebersicht des Inhalts.

Einleitung.

Dritter Abschnitt.

Dritter Theil.

Die Trigonometrie.

Erster Abschnitt.

Zweiter Abschnitt.

Dritter Abschnitt.

Vierter Abschnitt.

Fünfter Abschnitt.

Sechster Abschnitt.

Siebenter Abschnitt.

Achter Abschnitt.

Nachweisungen.

Seite 168. §. 257. Es sind hier solche Tafeln zu verstehen, in denen der Sinus totus = 1 angenommen ist, und die Functionen, welche die Einheit nicht übersteigen, um angegebene Zahl r vermehrt worden sind.

Seite 186—187. Aufgabe 10 u. 11. Die Grundlagen, auf welchen diese Aufgaben beruhen, führen zu sehr unsicheren Resultaten.

Seite 267. Aufgabe 58. Es ist durch Zufall die reducirte Formel rechter Hand zur numerischen Ausführung nicht benutzt worden.

Einleitung.

§ 1.

Der Begriff der **arithmetischen** Größe umfaßt nur die Menge gleichartiger Theile, aus denen sie besteht, ohne daß ihre Gestalt mit in Erwägung gezogen wird; wenn aber eine Größe ihrer Gestalt und Ausdehnung nach betrachtet wird, so heißt sie eine **geometrische** oder eine **Raumgröße**. Die arithmetische Größe oder die Zahl schlechtweg ist, da sie die Menge einzelner Dinge, als gleichartig angenommen, angiebt, nur von einerlei Art; die geometrische Größe hingegen kann in dreierlei Rücksicht genommen werden; erstens, als eine Ausdehnung in die blose Länge, welche **Linie** heißt; zweitens, als eine Ausdehnung in die Länge und Breite zugleich, welche **Fläche** genannt wird; drittens, als eine Ausdehnung in die Länge, Breite und Höhe (Dicke, oder Tiefe), und welche man **Körper** nennt. — Eigentlich ist hier nur der Raum zu verstehen, welchen der Körper einnimmt. — Die Linie ist also von **einer**, die Fläche von **zweien**, und der Körper von **drei** Abmessungen (Dimensionen).

Der Punkt und die Linie.

§. 2. Der einfachste aller Gegenstände geometrischer Betrachtungen ist der Punkt; er nimmt nur eine Stelle im Raume ein, ohne selbst einen Theil des Raumes auszumachen. — Als solcher ist er nur denkbar, und heißt **geometrischer Punkt**.

§ 3. Denkt man sich zwei im Raume auseinander liegende Punkte, so drückt ihre Entfernung von einander eine **Linie** aus. — Man unterscheidet gerade und krumme Linien: eine gerade ist diejenige, in welcher jeder Theil mit den übrigen einerlei Richtung hat; eine krumme Linie hingegen ist eine solche, von welcher kein Theil gerade ist. — Gerade Linien sind alle von einerlei Art d. h. sie sind ihrer Gestalt nach nicht von einander verschieden, nur ihrer Länge nach können sie es sein; krumme Linien hingegen kann es von unzählig verschiedener Gestalt geben. — Eine Linie läßt sich auch betrachten als ein Weg, den ein sich bewegender Punkt beschreibt. Geht die Bewegung immer nach derselben Richtung, so wird die Linie gerade; weicht der Punkt aber in jedem Augenblicke von seiner Richtung ab, so wird sie krumm. Die Grenzen einer Linie sind Punkte.

Die Fläche und die Ebene.

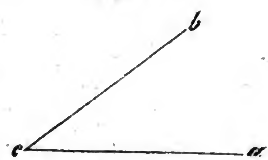
§. 4. Wenn eine Fläche so beschaffen ist, daß sich in ihr nach allen möglichen Richtungen hin gerade Linien ziehen lassen, so ist die Fläche

eine gerade und heißt zugleich eine **Ebene**. Z. B. die Oberfläche eines ruhig stehenden Wassers in kleinen Gefäßen ist eine Ebene, ferner sollen unsere gewöhnlich gebräuchlichen Spiegel ebenfalls Ebenen darstellen. — Eine krumme Oberfläche hingegen ist eine solche, welche nicht gerade ist (vergl. die Lehre von den Körpern).

Parallellinien. Convergirende und divergirende Linien.

§ 5. Zwei oder mehrere gerade Linien, die in einer Ebene liegen und gleichen Abstand von einander haben, heißen **Parallellinien**. Der Begriff der Ebene wird hier nothwendig mit bedingt; denn die Linien können z. B. von der einen Seite betrachtet, scheinbar parallel laufen, indem sie, von der anderen gesehen, nach verschiedenen Richtungen hingehen

Fig. 1.

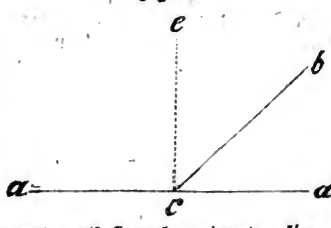


Sind die Linien nicht parallel, so müssen sie nach der einen Seite hin convergiren (zusammenlaufen), und nach der anderen divergiren (auseinanderlaufen).

Der Winkel überhaupt. Nebenwinkel; Scheitelwinkel.

§ 6. Zwei Linien, die gegeneinander nicht parallel sind, können nach der Seite hin, wo sie convergiren, so weit verlängert werden, daß sie zusammenstoßen oder sich schneiden; in diesem Fall bilden sie einen **Winkel**, welcher ein **ebener Winkel** heißt, der Punkt c (Fig. 1.) wird der **Scheitel** des Winkels oder die **Winkelspitze** genannt, und die Linien b c und a c, welche den Winkel bilden, heißen die **Schenkel** des Winkels.

Fig. 2.



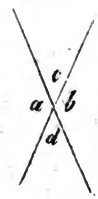
Die Schenkel können mehr oder weniger gegen einander geneigt sein; und nach dem Grade der Neigung, nicht nach der Länge der Schenkel, wird die **Größe** eines Winkels bestimmt (vgl. die Lehre vom Kreise).

§. 7. Wird der eine Schenkel eines Winkels über die Spitze hinaus verlängert, so entsteht noch ein zweiter Winkel. Beide zusammen werden in Beziehung auf ihre gegenseitige Lage **Nebenwinkel** genannt, weil sie neben einander liegen. (Fig. 2.) Es ist hier gleichgiltig, welchen von beiden Schenkeln man verlängert. In angeführter Figur ist a c nach d verlängert, und beide Winkel bei c sind Nebenwinkel. Es sind jedoch nicht immer jede Winkel, die neben einander liegen, Nebenwinkel; denn zwei Nebenwinkel müssen so beschaffen sein, daß sie einen Schenkel b c gemeinschaftlich haben, und die beiden anderen Schenkel c a und c d zusammen eine gerade Linie bilden.

Man bezeichnet einen Winkel mit **einem**, oder, um Zweideutigkeiten zu vermeiden, mit **drei** Buchstaben; im letzteren Fall wird der Buch-

stabe am Scheitel in die Mitte gesetzt. — Der Winkel wird nämlich immer nach dem Scheitel bezeichnet, z. B. in (Fig. 2.) heißt Winkel d c b oder b c d der Winkel c, welchen die beiden Schenkel b c, d c mit einander bilden.

Fig. 3.

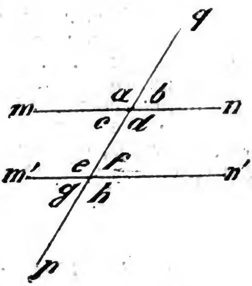


§ 8. Wenn zwei gerade Linien (Fig. 3.) einander schneiden, so heißen die einander gegenüber liegenden Winkel Scheitelwinkel; a und b sowohl als c und d sind jede für sich Scheitelwinkel. Ferner sind nach (§ 7.) a und c; c und b, b und d, d und a Nebenwinkel.

Correspondirende und Wechselwinkel.

§ 9. Wenn zwei Parallellinien m n, m' n' von einer dritten gerade durchschnitten werden, so entstehen außer Neben- und Scheitelwinkeln auch noch correspondirende und Wechselwinkel (Fig. 4.) Die Winkel b, f; d, h; a, e; c, g, deren Schenkel nach derselben Richtung gehen und die auf einer Seite der Linie p q liegen, heißen correspondirende Winkel; hingegen die einander schräg gegenüber liegenden Winkel, als: c, f; e, d, ingleichen a, h; b, g heißen Wechselwinkel und zwar erstgenannte die inneren und letztere die äußeren Wechselwinkel.

Fig. 4.



Geometrische Figuren.

§ 10. Wenn eine Ebene von allen Seiten begrenzt wird, so entsteht dadurch eine Figur und zwar eine Figur in engerem Sinne oder eine geometrische Figur.

Bemerkung. Man unterscheidet die Figuren in engerem Sinne und in Figuren überhaupt, letztere sind nur Bezeichnungen geometrischer Gegenstände.

Eine Figur kann geradlinig, krummlinig und gemischtlinig sein, je nachdem sie von geraden, krummen Linien oder von beiden zugleich eingeschlossen wird.

§ 11. Die geradlinigen Figuren werden nach der Zahl ihrer Seiten, von denen sie eingeschlossen sind, in dreiseitige, vierseitige und vielseitige eingetheilt und heißen daher Dreiecke (Triangel), Vierecke und Vielecke; die Vielecke werden auch mit einem gemeinschaftlichen Namen Polygone bezeichnet.

Ein jedes Vieleck hat, was in gleicher Weise den Dreiecken und Vierecken gilt, auch eben so viel Winkel als Seiten; sind alle Winkel und Seiten in demselben einander gleich, so heißt es ein regelmäßiges Vieleck.

§ 12. Die Dreiecke, welche die Grundlage aller vielseitigen Figuren ausmachen, werden in Hinsicht ihrer Seiten eingetheilt in gleichsei-

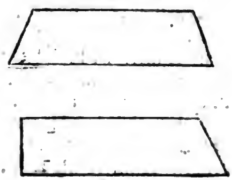
tige, wenn alle Seiten einander gleich sind; in ungleichseitige, wenn keine Seite der anderen gleich ist; und in gleichschenkelige, wenn nur zwei Seiten einander gleich sind. — Bei dem gleichschenkeligen Dreieck heißt die dritte ungleiche Seite vorzugsweis die Grundlinie oder die Basis.

In Hinsicht ihrer Winkel unterscheidet man rechtwinkelige Dreiecke, wenn ein rechter Winkel darin enthalten ist; spitzwinkelige, wenn alle drei Winkel spitz sind; und stumpfwinkelige, wenn ein stumpfer Winkel darin vorkommt (vergl. § 27).

§ 13. In einem rechtwinkeligen Dreieck nennt man die beiden Seiten, welche den rechten Winkel einschließen, die Katheten, und die, welche dem rechten Winkel gegenüberliegt, die Hypotenuse.

Vierecke.

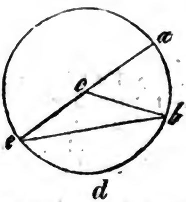
Fig. 5.



§ 14. Wenn in einem Viereck die gegenüberliegenden Seiten parallel laufen, so heißt dasselbe ein Parallelogramm; gehen nur zwei Seiten parallel, so wird es ein Trapez (Trapezium) genannt (Fig. 5.) — In einem solchen können die beiden nicht parallelen Seiten ungleich sein, dann nennt man es auch ein Trapezoid.

Der Kreis.

Fig. 6.



§ 15. Der Kreis ist eine in sich selbst zurückkehrende geschlossene krumme Linie, und hat unter allen krummen Linien die einfachste Entstehungsart. Er entsteht, wenn eine (gerade) Linie a c (Fig. 6) in einer Ebene sich um einen festen Punkt so weit herumdreht, bis sie wieder in ihre frühere Stelle gelangt. Die ganze krumme Linie, die der Punkt a beschreibt, heißt der Umfang des Kreises, auch Peripherie und Circumferenz genannt, und in welchem jeder Punkt von dem festen Punkt c, welcher der Mittelpunkt (Centrum) des Kreises heißt, gleich weit absteht. — Eine gerade Linie c a vom Mittelpunkte bis an die Peripherie wird der Halbmesser (Radius), dann eine Linie a e, die von einem Ende des Umfangs durch den Mittelpunkt c bis an das andere Ende desselben geht, der Durchmesser (Diameter) genannt.

Jede gerade Linie wie b e, die von einem Punkte der Peripherie bis an einen anderen geht, aber den Mittelpunkt nicht trifft, heißt eine Sehne (Chorde), und der Theil b d e des Kreisumfanges, in welchem derselbe durch die Sehne b e zerschnitten wird, hat den Namen eines Bogens (Arcus), der Theil der Kreisfläche, welcher von ihrer Sehne und ihrem Bogen eingeschlossen wird, heißt ein Abschnitt (Segment), und der Theil, der zwischen zwei Halbmessern und dem zugehörigen Bogen liegt, wie a c b, wird ein Ausschnitt (Sector) genannt. — Alle Halbmesser, so wie auch alle Durchmesser eines Kreises sind einander gleich.

Die vornehmsten, beim Vortrag der geometrischen Lehren vorkommenden Begriffe.

§ 16. Der Grundsatz (Axioma) ist ein Satz, dessen Wahrheit an und für sich einleuchtend ist: z. B. Gleiches zu Gleichem addirt, oder Gleiches mit Gleichem multiplicirt, giebt gleiche Summen, oder gleiche Producte; Gleiches von Gleichem subtrahirt, oder Gleiches durch Gleiches dividirt, giebt gleiche Reste, oder gleiche Quotienten u. s. w. Zwei gerade Linien können sich nur in einem einzigen Punkte durchschneiden; u. s. w.

Der Lehrsatz (Theorema) ist ein Satz, dessen Wahrheit erst aus Grundsätzen abgeleitet werden muß.

Die Aufgabe (Problema) legt gewisse Bedingungen vor, nach denen irgend ein entsprechendes Resultat verlangt wird. — Das Aufsuchen dieses Resultats nach bestimmten Regeln macht die Auflösung (Solutio) der Aufgabe aus.

Der Beweis (Demonstratio) ist das Verfahren, nach welchem man die Richtigkeit des Lehrsatzes oder der Auflösung der Aufgabe herleitet.

Der Zusatz (Corollarium) ist ein Satz, der aus einem Lehrsatze oder aus einer Aufgabe hervorgeht.

Der Lehnsatz (Lemma) ist überhaupt jeder Satz, der außer der Ordnung der Lehrgegenstände für die Beweisführung ꝛc. im Voraus mit zur Hülfe genommen wird.

Die Anmerkung (Scholion) hat den Zweck, an einem Satze noch irgend etwas der Klarheit wegen besonders hervorzuheben.

Erster Theil.

Die Lehre von den Flächen (Planimetrie).

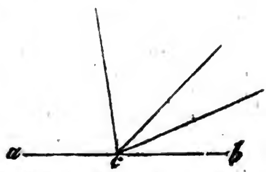
Erster Abschnitt.

Von den Winkeln insbesondere und von den Parallellinien.

§ 17. Lehrsatz. Zwei Nebenwinkel sind zusammengenommen immer so groß als zwei rechte.

Beweis. Sind beide Winkel einander gleich, so ist jeder ein rechter, folglich machen sie beide zusammen zwei rechte aus. — Sind sie aber ungleich, so ist der eine größer, der andere kleiner als ein rechter. Ist (Fig. 2.) a c b der größere und b c d der kleinere, und man denkt sich c e senkrecht auf a d gezogen, so übertrifft der größere Winkel den rechten a c e um eben so viel als dem kleineren an einem rechten Winkel fehlen, nämlich, um den Winkel e c b. Folglich sind beide zusammen immer zwei rechten gleich, sie mögen an Größe auch noch so verschieden sein.

Fig. 7.



Zusatz 1. Alle Winkel über einer geraden Linie, deren Scheitel in demselben Punkte liegt, sind zusammengenommen so groß als zwei rechte (Fig. 7.); denn sie können als Theile zweier Nebenwinkel betrachtet werden.

Wenn von drei Nebenwinkeln der eine $\frac{1}{6}$, der andere $\frac{4}{6}$ eines rechten ausmacht, so ist der dritte $\frac{7}{6}$ eines rechten.

Zusatz 2. Die Winkel unter einer geraden Linie, deren Scheitel in einem Punkte liegen, sind ebenfalls zusammen zwei rechten gleich; daher sind alle Winkel über und unter einer geraden Linie vier rechten gleich. — Denkt man sich auch die gerade Linie hinweg, so sind überhaupt alle Winkel um einen Punkt herum zusammen vier rechten gleich.

§ 18. Lehrsatz, Scheitelwinkel sind einander gleich.

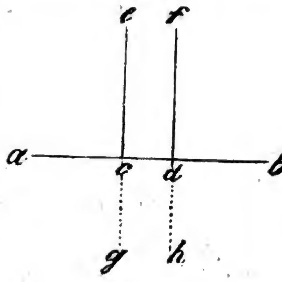
Beweis. Man nehme z. B. die Scheitelwinkel a und b (Fig. 3.), so ist

$$a + c = 2 R \text{ (als Nebenwinkel), und auch}$$
$$b + c = 2 R, \text{ daher}$$
$$a + c = b + c, \text{ folglich } a = b.$$

Der nämliche Beweis läßt sich auch für die Scheitelwinkel c und d führen.

Zusatz. Wenn zwei gerade Linien einander schneiden und einer der dadurch entstehenden Scheitelwinkel ist gegeben, dann sind auch die drei übrigen bestimmt.

Fig. 8.



§ 19. Lehrsatz. Wenn zwei gerade Linien c e, d f (Fig. 8.) auf einer dritten a b senkrecht stehen, so sind erstere parallel.

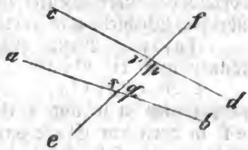
Beweis. Man verlängere e c nach g, und f d nach h, so sind auch c g und d h auf a b senkrecht; denn die beiden Linien müssen jetzt auf dieser Seite dieselbe Lage gegeneinander und gegen a b haben, wie c e und d f. Sie können also weder convergiren noch divergiren, sondern müssen parallel laufen.

Zusatz 1. Hieraus folgt, daß zwei gerade Linien, die einander schneiden, nicht zugleich auf einer dritten senkrecht stehen können.

Zusatz 2. Von einem Punkt außerhalb einer geraden Linie ist nur ein einziges Perpendikel auf dieselbe möglich.

§ 20. Grundsatz. Wenn zwei gerade Linien a b, c d (Fig. 9.), welche nicht parallel sind, von einer dritten geraden e f geschnitten werden, so sind die Winkel r, s auf der Seite, auf welcher die Linien divergiren, zusammen größer als die Winkel p, q auf der anderen Seite, wo die Linien convergiren; eben so findet das Umgekehrte statt.

Fig. 9.



§ 21. Lehrsatz. Wenn zwei gerade Linien a b, c d (Fig. 9.), welche nicht parallel sind, von einer dritten geraden f e durchschnitten werden, so sind die Winkel r, s auf der Seite, wo die Linien divergiren, größer als zwei rechte; hingegen die Winkel p, q auf der anderen Seite sind kleiner als zwei rechte.

Beweis. Es ist Winkel $r + p = 2\ R$
ingleichen $s + q = 2\ R$

folglich $r + s + p + q = 4\ R.$

Wäre nun Winkel $r + s = p + q$, so müßte sowohl $r + s$ als auch $p + q$ gleich 2 R sein. Es ist aber Winkel $r + s$ größer als $p + q$, folglich $r + s$ größer und $p + q$ kleiner als zwei rechte Winkel.

§ 22. Aufgabe. Es soll vorhergehender Lehrsatz im umgekehrten Sinne bewiesen werden, daß nämlich, wenn zwei gerade Linien a b, c d von einer dritten e f geschnitten werden, und die beiden inneren Winkel p, q auf der einen Seite der Linie e f zusammen kleiner sind als die beiden anderen r, s, die Linien auf letzterer Seite divergiren und auf der anderen convergiren.

§ 23. Lehrsatz. Wenn zwei gerade Linien, m n und m′n′ von einer dritten (geraden) p q geschnitten werden, und die beiden inneren Winkel d, f und c, e auf jeder Seite der schneidenden Linie sind = 2 R, so sind die Linien m n und m′n′ parallel (siehe Fig. 4).

Beweis. Wären diese Linien nicht parallel, so müßten sie auf der einen Seite der Linie p q convergiren und auf der anderen divergiren, folglich müßten die inneren Winkel auf der einen Seite kleiner und auf der anderen größer als zwei rechte sein (§ 22), welches gegen die Voraussetzung ist.

§ 24. Lehrsatz. Wenn zwei Parallellinien von einer dritten geraden Linie durchschnitten werden, so sind 1) die beiden inneren Winkel auf jeder Seite der schneidenden Linie zusammen = 2 R; 2) die Wechselwinkel einander gleich; 3) die correspondirenden Winkel einander gleich.

Beweis. Wären die inneren Winkel (Fig. 4.) auf jeder Seite nicht gleich zwei rechten, so müßten sie auf der einen Seite größer und auf der anderen kleiner als zwei rechte sein; daher müßten sie auf ersterer Seite divergiren und auf letzterer convergiren, was der Voraussetzung widerspricht. Folglich müssen die inneren Winkel auf jeder Seite gleich zwei rechten sein.

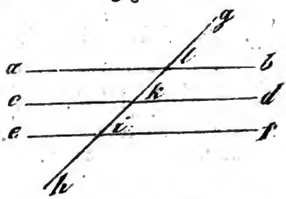
Da ferner Winkel $e + f = 2\,R$
und auch $d + f = 2\,R$

so folgt $e + f = d + f$, also $e = d$ als Wechselwinkel.

Da nun $e = h$ ist als Scheitelwinkel, so folgt, daß $h = d$ als correspondirender Winkel ist. Daraus geht weiter hervor, daß auch die übrigen Wechsel- und correspondirende Winkel einander gleich sind.

Zusatz. Wenn einer von diesen 8 Winkeln gegeben ist, dann können auch die übrigen 7 gefunden werden.

Fig. 10.



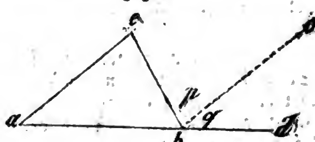
§ 25. Lehrsatz. Wenn zwei gerade Linien $a\,b$ und $c\,d$ einer dritten $e\,f$ in derselben Ebene parallel sind, so sind sie unter sich selbst parallel (Fig. 10.)

Beweis. Man durchschneide alle drei Linien durch eine vierte $g\,h$, so ist
Winkel $l = k$ } als correspondirende
und $l = i$ } Winkel

folglich $k = i$;
daher muß $a\,b$ parallel mit $c\,d$ sein.

Anmerkung. Hieraus ergiebt sich, daß, wenn man eine noch so große Reihe von Linien hat, von denen jede der ihr zunächst liegenden parallel ist, sie alle einander parallel laufen.

Fig. 11.



§ 26. Lehrsatz. Die Summe der Winkel in jedem Dreieck ist gleich zwei rechten.

Beweis. Man verlängere in dem Dreieck $a\,b\,c$ (Fig. 11.) eine Seite $a\,b$ nach d hin, und nehme von b aus eine Parallele $b\,e$ mit $a\,c$ gezogen an, so ist p der Wechselwinkel von c, und q der correspondirende von a; folglich ist $p = c$, und $q = a$, und Winkel $a\,b\,c = a\,b\,c$ d. h. sich selbst gleich;
daher ist Winkel $a + c + a\,b\,c = q + p + a\,b\,c$.
Nun ist $q + p + a\,b\,c = 2\,R$ (§ 17. Zusatz 2.)

folglich $a + c + a\,b\,c = 2\,R$.

Zusatz 1. Da $p = c$, und $q = a$, so ist $p + q = a + c = c\,b\,d$, d. h. der äußere Winkel eines Dreiecks ist so groß, als die beiden inneren gegenüberliegenden zusammengenommen.

Zusatz 2. Der äußere Winkel eines Dreiecks ist größer, als ein jeder der beiden inneren gegenüberliegenden.

Zusatz 3. Durch zwei Winkel in einem Dreiecke wird auch die Größe des dritten bestimmt.

Zusatz 4. Wenn in zwei Dreiecken zwei Winkel gleich sind, so ist es auch der dritte.

Zusatz 5. In einem Dreiecke kann nicht mehr als ein rechter und nicht mehr als ein stumpfer enthalten sein, weil, wenn ein rechter oder ein stumpfer darin vorkommt, die beiden anderen spitz sein müssen.

Zusatz 6. Wenn alle Winkel eines Dreiecks einander gleich sind, so ist jeder $= \frac{2}{3}\,R$.

Zweiter Abschnitt.

Von der Congruenz oder Gleichheit der Figuren, und besonders der Dreiecke.

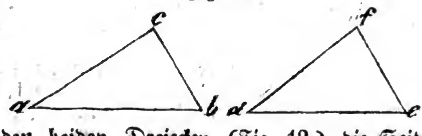
§ 27. Man kann die Gleichheit der Figuren in dreierlei Rücksicht betrachten; erstens als eine Gleichheit ihrer Größe, zweitens als eine Gleichheit ihrer Gestalt, und drittens als eine Gleichheit ihrer Größe und ihrer Gestalt zugleich, letztere Gleichheit ist die vollkommenste, und heißt Congruenz, und diese Gleichheit ist es, von welcher hier die Rede ist.

§ 28. Wenn zwei Dreiecke an Größe und Gestalt einander gleich sind, so müssen sowohl die Seiten als die Winkel des einen den Seiten und Winkeln des anderen gleich sein. In diesem Fall können die Dreiecke, wenn man sie auf einander legt, einander decken. Umgekehrt kann man auch schließen, daß, wenn zwei Dreiecke einander decken, ihre Seiten und Winkel einander gleich sind.

§ 29. Ein Dreieck besteht aus sechs Stücken: aus drei Seiten und aus drei Winkeln; es läßt sich dann aus der Gleichheit einiger dieser Stücke in zwei Dreiecken bestimmen, ob sie einander decken können oder nicht. Drei dieser Stücke sind zu dieser Bestimmung hinreichend; unter diesen drei Stücken muß aber wenigstens eine Seite mit gegeben sein. Nächste Sätze werden zeigen, welche Stücke dazu hinreichend sind.

§ 30. Lehrsatz. Wenn in zwei Dreiecken zwei Seiten und der von diesen eingeschlossene Winkel gleich sind, so sind die ganzen Dreiecke einander gleich.

Fig. 12.



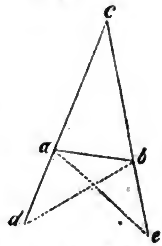
Beweis. Es sei in den beiden Dreiecken (Fig. 12.) die Seite ab = de; ac = df, und der Winkel a = d, denkt man sich nun, daß das Dreieck def so auf abc gelegt wird, daß d auf a, und e auf b fällt, so muß auch df auf ac fallen, weil Winkel d = a ist; ferner muß f auf c treffen, weil df = ac ist. Nun ist aber e auf b und f auf c zu liegen gekommen, folglich muß auch fe auf cb fallen; daher müssen beide Dreiecke einander decken.

Zusatz 1. Gleichen Seiten stehen gleiche Winkel, und umgekehrt, gleichen Winkeln gleiche Seiten gegenüber.

Zusatz 2. Zwei Seiten mit dem eingeschlossenen Winkel bestimmen ein Dreieck so, daß sich nur ein einziges daraus beschreiben läßt, obgleich es verschiedene Lagen haben kann.

§ 31. Lehrsatz. In jedem gleichschenkeligen Dreieck a b c (Fig. 13.) sind die Winkel an der Grundlinie, und, wenn man die Schenkel c a, c b verlängert, auch die Winkel unter der Grundlinie einander gleich, nämlich Winkel d a b = a b e.

Fig. 13.



Beweis. Man verlängere die gleichen Schenkel c a, c b, mache beliebig c d = c e, dann ist a d = b e. Nun ist

1) Dreieck a c e congruent dem Dreieck c b d, weil in ihnen zwei Seiten nämlich c e = c d, und c a = c b sind, und der von ihnen eingeschlossene Winkel c gleich ist.

2) Es ist Winkel d = e, dann die Seite b d = a e, und a d = b e, folglich Dreieck a b d = a b e, folglich auch Winkel d a b = a b e als Winkel unter der Grundlinie.

3) Nun ist Winkel d a b + b a c = 2 R } als Nebenwinkel.
ingleichen a b e + a b c = 2 R }

Da nun Winkel d a b = a b e, so ist Winkel b a c = a b c als Winkel an der Grundlinie.

Zusatz. Wenn von den drei Winkeln eines gleichschenkeligen Dreiecks nur einer bekannt ist, so lassen sich die beiden anderen daraus finden. Es sei z. B. ein Winkel an der Grundlinie = ¾ R, so ist der dritte, der Basis gegenüberliegende $= 2\ R - \frac{2 . 3}{4} R = \frac{1}{2} R.$

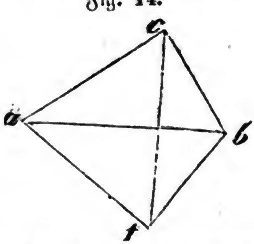
§ 32. Lehrsatz. Wenn in zwei Dreiecken eine Seite und die daran liegenden Winkel gleich sind, so sind die ganzen Dreiecke einander gleich.

Beweis. Es sei z. B. Seite d e = a b, und Winkel d = a, (Fig. 12.), ferner Winkel e = b, dann nehme man wieder an, es werde das Dreieck d f e auf a b c gelegt, daß d auf a, und e auf b falle, so wird auch d f auf a c, und e f auf b c fallen müssen, wegen b = e. Die Dreiecke decken also einander und sind folglich congruent.

§ 33. Lehrsatz. Wenn in zwei Dreiecken alle drei Seiten beziehungsweis einander gleich sind, so sind die ganzen Dreiecke einander congruent.

Beweis. Man lege die beiden Dreiecke (Fig. 12.) so an einander, wie Fig. 14. zeigt, und ziehe die Linie c f, so erhalten wir zwei gleichschenkliche Dreiecke c b f und c f a. In diesen ist Winkel f c b = b f c, und Winkel a c f = a f c, folglich Winkel a c b = a f b. Da nun die, diesen Winkel einschließenden Seiten in jedem Dreiecke einander gleich sind, nämlich b c = b f, und a c = a f, so sind folglich beide Dreiecke einander völlig congruent.

Fig. 14.

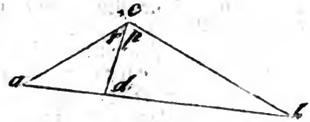


Anm. Es ist übrigens gleichgiltig, welche gleiche Seiten von diesen Dreiecken an einander gelegt werden.

Zusatz. Drei Seiten bestimmen ein Dreieck, so daß sich daraus nur ein einziges, obwohl von verschiedener Lage, bestimmen läßt.

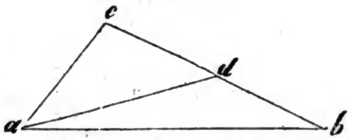
§ 34. **Lehrsatz.** In jedem Dreiecke steht der größeren Seite auch ein größerer Winkel gegenüber.

Fig. 15.



Beweis. Es sei in dem Dreieck a b c (Fig. 15.) die Seite a b größer als b c, und es soll nun bewiesen werden, daß Winkel a c b größer ist als a. Man mache deshalb b d = b c und ziehe c d, so ist b c d ein gleichschenkeliges Dreieck, und daher Winkel p = b d c. Nun ist b d c als der äußere Winkel des Dreiecks a d c gleich dem Winkel a + r, folglich auch Winkel p = a + r; daher um so mehr Winkel p + r d. i. Winkel a c b größer als a. Es liegt also der größeren Seite ab ein größerer Winkel a c b gegenüber als der Seite b c, welcher der Winkel a gegenüberliegt.

Fig. 16.



Anm. Es ist nicht gerade nöthig, daß man zur Führung des Beweises die beiden größeren Seiten nimmt; es können auch jede beliebige zwei dazu dienen. Nimmt man z. B. die Seiten a c und c b, so mache man c d = a c und ziehe a d (Fig. 16.), so ist, wie oben, a c d ein gleichschenkeliges Dreieck. Es ist also jetzt zu beweisen, daß Winkel c a b größer ist als b. Nun ist Winkel c d a = d a b + b, als der äußere Winkel des Dreiecks a d b, daher auch Winkel c a d = d a b + b, folglich um so mehr Winkel c a d + d a b oder c a b größer als b.

Zusatz 1. Die größte Seite in einem Dreieck überhaupt steht dem größten Winkel desselben gegenüber.

Zusatz 2. Die Hypotenuse eines rechtwinkeligen Dreiecks ist die größte unter den drei Seiten desselben.

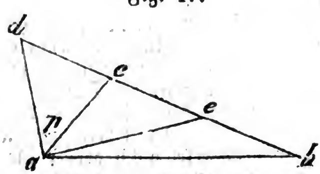
§ 35. **Lehrsatz.** In jedem Dreiecke steht dem größeren Winkel auch eine größere Seite gegenüber.

Beweis. Es sei Winkel a c b größer als a (Fig. 15). Wäre nun a b = c b, so müßte Winkel a c b = a sein; wäre aber a b kleiner als b c, so müßte Winkel a c b kleiner als a sein. Da nun beides gegen die Voraussetzung ist, so ist Seite a b weder gleich noch kleiner als b c.

Zusatz. Wenn alle Winkel eines Dreiecks einander gleich sind, so sind es auch die Seiten desselben.

§ 36. **Lehrsatz.** In jedem Dreieck sind zwei Seiten zusammengenommen größer als die dritte. Es sei nämlich in dem Dreieck a b c (Fig. 17.), a b größer als jede der beiden anderen Seiten, so ist b c + a c > a b.

Fig. 17.



Beweis. Man verlängere b c nach d, mache c d = a c, und ziehe a d, alsdann ist Winkel p = d (§ 31.)

Es ist aber der Winkel $dab > p$, folglich auch Winkel $dab > d$; daher auch Seite $db > ab$ (§ 35). Da nun $db = ac + cb$, so ist $ac + cb > ab$.

Zusatz. In einem gleichschenkeligen Dreieck muß, wenn ein rechter Winkel darin enthalten ist, derselbe über der Basis liegen.

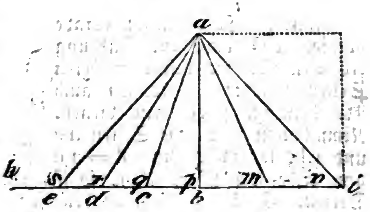
§ 37. Lehrsatz. In einem Dreieck ist jede Seite größer als der Unterschied der beiden anderen.

Beweis. Nimmt man in Fig. 17. an, daß $bc > ac$ sei, macht $ce = ac$ und zieht ae, so ist $bc - ac = bc - ce = be$; also be der Unterschied der beiden Seiten. Da nun Winkel aec spitz, folglich aeb stumpf ist (§ 17.), so ist $eb < ab$.

Anm. In einem gleichschenkeligen Dreieck nämlich hier ace, müssen die Winkel an der Grundlinie spitz sein (§ 26. Zus. 5.)

§ 38. Lehrsatz. Das Perpendikel ab ist unter allen Linien, die von a nach der geraden Linie hi gezogen werden können, die kleinste.

Fig. 18.



Beweis. Zieht man von a die Linien ac, ad, ae (Fig. 18.), so sind alle die Dreiecke abc, abd, abe, u. s. w. rechtwinkelige und der rechte Winkel p, und ac, ad, ae sind die Hypotenusen derselben, folglich sind diese alle größer als ab; daher ist ab kleiner als jede andere Linie von a nach hi.

Zusatz 1. Das Perpendikel ab mißt den Abstand des Punktes a von der Linie hi.

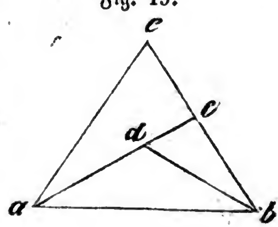
Zusatz 2. Je weiter sich die Linien, welche von a nach hi gezogen werden, von dem Perpendikel ab entfernen, desto größer werden sie: es ist nämlich ae größer als ad, diese wieder größer als ac, und ac größer als ab. Denn die Winkel q, r, s sind stumpfe, folglich sind die ihnen gegenüberliegenden Seiten größer als die, welche ihren Nebenwinkeln gegenüberliegen.

Zusatz 3. Die Winkel q, r, s u. s. w. werden immer größer, und ihre Nebenwinkel immer kleiner.

Zusatz 4. Auf beiden Seiten des Perpendikels ab sind die von a nach hi gezogenen Linien einander gleich, welche von b gleich weit entfernt sind.

§ 39. Lehrsatz. Laufen von einem Punkte d innerhalb eines Dreiecks abc (Fig. 19.) gerade Linien da, db nach den Endpunkten der Grundlinie ab, so sind sie zusammen kleiner als die beiden Seiten ac und bc des Dreiecks, schließen aber einen größeren Winkel ein.

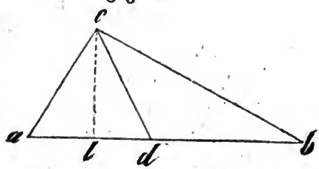
Fig. 19.



Beweis. Man verlängere ad bis e, so ist Winkel adb größer als aeb, und Winkel aeb größer als c; folglich um so mehr adb größer als c (§ 26. Zus. 2).

Ferner ist $ac + ce > ae$ und $eb + ed > db$; folglich ist $ac + ce + eb + ed > ae + db$ d. i. $> ad + de + db$; und, wenn man auf beiden Seiten ed wegnimmt, $ac + ce + eb > ad + db$, d. h. $ae + cb > ad + db$.

Fig. 20.



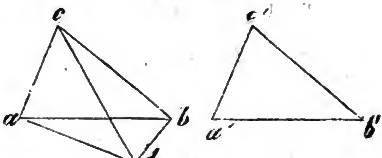
§ 40. **Lehrsatz.** Wenn in zwei Dreiecken zwei Seiten und der Winkel, welcher der größeren von diesen beiden gegenüberliegt, gleich sind, so sind die ganzen Dreiecke einander congruent.

Beweis. In dem Dreieck abc (Fig. 20.) sollen die beiden Seiten bc und ca und der Winkel a, welcher der größeren Seite cb gegenüberliegt, gegeben sein, so ist das ganze Dreieck völlig bestimmt. Denn der Winkel a kann unter dieser Bedingung die Seite bc in keiner anderen Lage sich gegenüber haben als wie sie jetzt liegt. Wäre aber statt des Winkels a der Winkel b gegeben, welcher von den beiden gegebenen Seiten der kleineren ac gegenüberliegt, so wäre das Dreieck unbestimmt. Denn der Winkel b kann die Seite ac auch in der Lage cd sich gegenüber haben. Letzteren Bedingungen können demnach zwei verschiedene Dreiecke genügen.

Zusatz 1. Wenn zwei Seiten und der, der größeren gegenüberliegende Winkel gegeben sind, so läßt sich immer nur ein und dasselbe Dreieck, wenn auch in verschiedener Lage, construiren. Sind aber zwei Seiten und der, der kleineren gegenüberliegende Winkel gegeben, so lassen sich zwei verschiedene Dreiecke, aber auch nicht mehr daraus construiren; in obiger Figur also acb und bcd, wenn die Seiten ac, bc und der Winkel b, welcher der kleineren Seite gegenüberliegt, gegeben sind.

Zusatz 2. Wenn eine Kathete und die Hypotenuse eines rechtwinkeligen Dreiecks, einer Kathete und der Hypotenuse eines anderen gleich sind, so sind die ganzen Dreiecke einander gleich.

Fig. 21.



§ 41. **Lehrsatz.** Sind zwei Seiten in dem einen Dreieck so groß als in dem anderen, aber der von den gleichen Seiten eingeschlossene Winkel in dem ersteren größer als in dem letzteren, so ist auch die dritte Seite in jenem Dreieck größer als in diesem.

Beweis. Es sei in den Dreiecken abc und $a'b'c'$ (Fig. 21.) die Seite $ac = a'c'$, $cb = c'b'$ und der Winkel $acb > a'c'b'$, so wird behauptet, daß Seite ab größer als $a'b'$ sei. Man nehme nun an, daß der Winkel $acd = a'c'b'$ sei, mache $cd = cb = c'b'$,

so ist Dreieck a c d = a′ c′ b′ (§ 30.); folglich a d = a′ b′. Man ziehe ferner d b, so ist Winkel c d b = c b d. Nun aber ist

Winkel c b d > b c d;
folglich c d b > a b d.
Nun ist a d b > c d b.
Also um so mehr a d b > a b d.

Folglich ist Seite a b > a d; und da a d = a′ b′, so ist Seite a b > a′ b′.

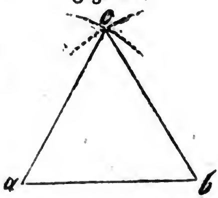
§ 42. Lehrsatz. Sind zwei Seiten in dem einem Dreieck so groß als in dem anderen, aber die dritte Seite in dem einen größer als in dem anderen, so steht der größeren Seite auch ein größerer Winkel gegenüber.

Bew. Es sei in den Dreiecken (Fig. 21.) a c = a′ c′, c b = c′ b′, und a b größer als a′ b′, so muß auch der Winkel a c b größer als a′ c′ b′ sein. Denn außerdem würden, wenn beide Winkel einander gleich wären, auch die ganzen Dreiecke nach (§ 30.) einander gleich, daher auch a b = a′ b′ sein, welches wider die Voraussetzung ist. Wäre aber der Winkel a c b kleiner als a′ c′ b′, so müßte a b kleiner als a′ b′ sein, also ebenfalls gegen die Voraussetzung. Folglich muß der Winkel a c b größer als a′ c′ b′ sein.

§ 43. Aufgaben.

1) Ein gleichschenkeliges Dreieck zu construiren.

Fig. 22.



Auflösung. Man nehme (Fig. 22.) eine beliebige Linie a b an, und schlage über derselben mit willkürlicher Oeffnung des Zirkels, die jedoch nach (§ 36.) größer sein muß als ½ a b, aus a und b beliebige Bogen; aus c, wo sich sich beide Bogen durchschneiden, ziehe man c b und c a, so ist a b c ein gleichschenkeliges Dreieck.

Beweis. Da a c und b c mit einerlei Oeffnung des Zirkels construirt sind, so müssen sie einander gleich sein, folglich ist das Dreieck gleichschenkelig.

Zusatz 1. Ueber einer gegebenen geraden Linie sind unzählige Dreiecke möglich.

Zusatz 2. Wird a c = a b genommen, so wird das Dreieck gleichseitig.

2) Ein Dreieck zu verzeichnen, welches einem gegebenen Dreieck gleich sei.

Auflös. Das gegebene Dreieck sei a h k (Fig. 26. S. 16). Man mache c g = a k; schlage aus c über c g mit einer Oeffnung des Zirkels = a h, dann aus g mit einer Oeffnung desselben = h k beliebige Bogen. Aus f, wo sich beide Bogen schneiden, ziehe man f c und f g, so ist c f g das verlangte Dreieck.

Der Beweis dieser Auflösung kann leicht geführt werden.

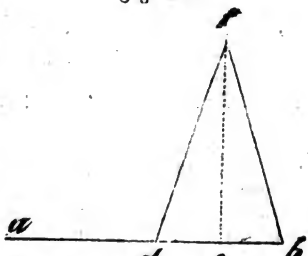
Zusatz. Statt des Dreiecks a h k können auch drei Linien gegeben sein, aus denen ein Dreieck zu construiren ist, nur müssen je zwei immer größer sein als die dritte (§ 36.)

3) Aus einem Punkte c auf einer Linie a b ein Perpendikel auf dieselbe zu errichten (Fig. 23.)

Auflösung. Man schneide aus c mit beliebiger Oeffnung des Zirkels zwei gleiche Stücke c d und c b ab, beschreibe über d b ein gleichschenkeliges Dreieck d b f, und ziehe aus f die Linie f c, so ist diese das verlangte Perpendikel.

Beweis. Beide Dreiecke c d f, c b f sind einander congruent, weil in beiden alle drei Seiten beziehungsweis gleich sind — denn es ist c b = c d, und b f = f d gemacht, dann ist die Linie f c, da sie zu beiden Dreiecken gehört, sich selbst gleich — daher sind auch die Nebenwinkel bei c einander gleich, folglich sind es rechte (§ 17.) Daher ist f c ein Perpendikel.

Fig. 23.

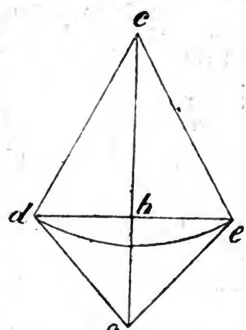


Zusatz 1. Hier zeigt sich abermal, wie (§ 19.), Zus. 2. daß aus einem Punkte c nur ein einziges Perpendikel auf a b möglich ist.

Zusatz 2. Sind die Dreiecke c f d und c f b einander gleich, so sind auch die Winkel an der Spitze f einander gleich.

Zusatz 3. Ein Perpendikel aus der Spitze f eines gleichschenkeligen Dreiecks d b f auf die Grundlinie d b, halbirt sowohl die Grundlinie, als den ihr gegenüberstehenden Winkel f, und das ganze Dreieck.

Fig. 24.



Zusatz 4. Eine gerade Linie f c, aus der Spitze f eines gleichschenkeligen Dreiecks d b f, auf die Mitte c der Grundlinie d b gezogen, steht senkrecht auf der Grundlinie.

4) Von einem Punkte c außerhalb der Linie a b ein Perpendikel auf diese Linie zu fällen (Fig. 24.)

Auflösung. Man beschreibe mit beliebiger aber hinlänglicher Oeffnung des Zirkels einen Bogen, der die Linie a b in d und e schneidet. — Die Linie a b muß man sich über d und e hinaus verlängert denken. Aus d und e beschreibe man ferner wieder mit willkürlicher Oeffnung des Zirkels unterhalb a b ein Paar Bogen, die sich in g schneiden; alsdann ziehe man c h in der Richtung nach g, so ist c h die verlangte Senkrechte.

Beweis. Es ist zunächst darzuthun, daß die Winkel bei h rechte oder die bei c einander gleich sind; man verlängere deshalb c h bis g, ziehe c e, c d, g e, g d, so erhält man zwei congruente Dreiecke c g e

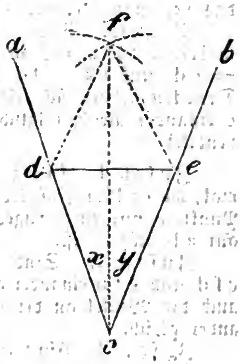
und c g d. Man vergleiche dann (§ 33.), so ergiebt sich das Uebrige von selbst.

5) Eine gerade Linie d e in zwei gleiche Theile zu theilen (Fig. 24.)

Auflösung. Man beschreibe über der Linie d e ein gleichschenkeliges Dreieck d c e, und fälle aus der Spitze c nach vorhergehender Aufgabe ein Perpendikel c h auf die Grundlinie d e, so ist h der Punkt, welcher die Linie d e halbirt.

6) Einen Winkel a c b in zwei gleiche Theile zu theilen (Fig. 25.)

Fig. 25.



Auflösung. Auf den Schenkeln nehme man vom Scheitel c aus beliebig große aber gleiche Stücke c d, c e; aus d und e beschreibe man mit willkürlicher aber hinlänglicher Oeffnung des Zirkels oberhalb d e ein Paar Bogen, die sich in f schneiden. Dann ziehe man f c, so ist durch diese Linie der Winkel a c b halbirt und x = y.

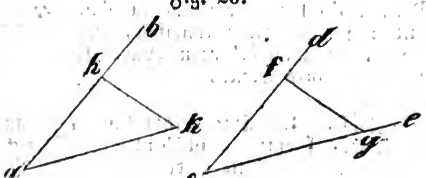
Zum Beweise sehe man Aufgabe 3.

Zusatz. Durch fortgesetztes Halbiren eines jeden Theils läßt sich der Winkel in 4, 8, 16, 32 u. s. w. Theile theilen.

Bem. Einen beliebigen Winkel in drei, oder in eine beliebige Anzahl gleicher Theile zu theilen ist eine Aufgabe der höheren Geometrie.

7) Einen gegebenen Winkel d c e z. B. an den Punkt a einer geraden Linie a b zu tragen (Fig. 26.)

Fig. 26.

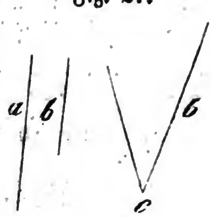


Auflösung. Man ziehe zwischen die Schenkel des Winkels eine beliebige Linie f g; dann trage man c f auf a b so, daß a h = c f werde. Aus h schlage man mit der Oeffnung des Zirkels = f g, und eben so aus a mit der Oeffnung = c g Bogen, die sich in k schneiden; dann ziehe man k h und k b, so ist Winkel a = c.

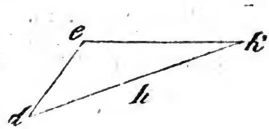
Beweis. Man lese den Zusatz der Aufgabe 2 nach.

8) Aus den zwei gegebenen Seiten a, b und dem Winkel c, welcher der größeren a gegenüber liegen soll, ein Dreieck zu construiren (Fig. 27.) Das gesuchte Dreieck steht auf S. 17. oben an.

Fig. 27.



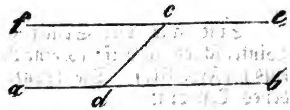
Auflösung. Man mache d e = b, trage etwa an d den Winkel c, und verlängere den einen Schenkel genugsam nach k hin, dann schlage man mit einer Oeffnung des Zirkels = a aus e einen Bogen bei k, aus k, wo d k von dem Bogen geschnitten wird, ziehe man k e, so ist d e k das verlangte Dreieck.



Beweis. Es ist jetzt d = c, ek = a, und dk ist die dritte Seite, die sich nach (§ 40.) und keine andere ergeben muß.

Anm. Der Winkel kann aber so gut an e getragen werden, dann erhält das Dreieck nur eine andere Lage.

Fig. 28.



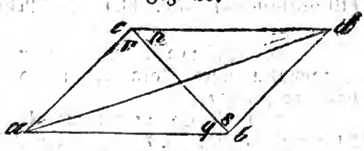
9) Durch einen Punkt c eine Linie zu ziehen, welche der Linie a b parallel läuft (Fig. 28.)

Auflösung. Man ziehe von c eine beliebige Linie c d, und trage den Winkel c d b so an c, daß f c d = c d b werde und verlängere f c nach e, so ist f c parallel mit a b.

Der Beweis folgt aus der Gleichheit der Winkel c d b und d c f (§ 24.)

Die Vielecke und besonders die Parallelogramme.

Fig. 29.



§ 44. Lehrsatz. Ein Parallelogramm wird durch die Diagonale in zwei gleiche Dreiecke getheilt.

Beweis. Man ziehe in dem Parallelogramm (Fig. 29.) die Diagonale b c, so ist p = q, und r = s als Wechselwinkel. Da nun die beiden Dreiecke a b c und b c d eine Seite b c gemeinschaftlich haben, und in jedem die daran liegenden Winkel beziehungsweis einander gleich sind, so sind beide Dreiecke einander congruent (§ 32.)

Zusatz 1. Zieht man statt b c die Diagonale a d, so ist eben sowohl Dreieck a b d = a c d; nur sind diese Dreiecke von den vorhergehenden verschieden.

Zusatz 2. In einem Parallelogramm sind die parallelen Seiten einander gleich oder Parallelen zwischen Parallelen sind einander gleich.

Zusatz 3. In einem Parallelogramm sind die schräg gegenüberliegenden Winkel einander gleich, nämlich c a b = c d b, und a c d = a b d.

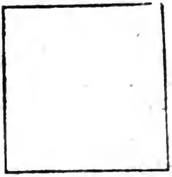
Zusatz 4. Durch einen einzigen Winkel eines Parallelogramms werden alle Winkel desselben bestimmt.

Zusatz 5. Die Summe aller Winkel in einem Parallelogramm ist = 4 R.

Zusatz 6. Die Winkelsumme in jedem Viereck ist = 4 R, weil es durch die Diagonale in zwei Dreiecke getheilt wird (§ 26.)

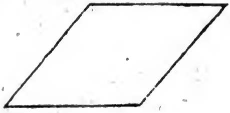
§ 45. Erklärung. Sind in einem Parallelogramm alle vier Seiten gleich, und alle vier Winkel rechte, so heißt es ein Quadrat (Fig. 30.)

Fig. 30.



Sind alle vier Seiten gleich, aber die Winkel schief, so heißt es eine Raute (Rhombus) (Fig. 31.) Die Raute ist ein verschobenes Quadrat.

Fig. 31.



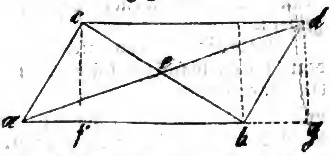
Sind blos die gegenüberliegenden Seiten gleich oder die anstoßenden Seiten ungleich, aber alle vier Winkel rechte, so heißt es ein Rechteck (Rectangulum, oblongum) (Fig. 32.)

Fig. 32.



Sind die anstoßenden Seiten ungleich und die Winkel schief, so heißt es eine längliche Raute oder Rhomboid (Rhomboides) (Fig. 33.) Das Rhomboid ist ein verschobenes Rechteck.

Fig. 33.



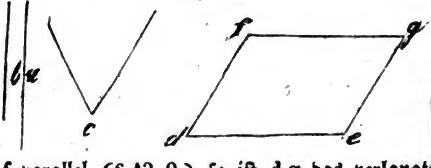
§ 46. Lehrsatz. Die beiden Diagonalen eines Parallelogramms halbiren einander.

Beweis. Es ist im Parallelogramm (Fig. 33.) das Dreieck cae congruent dem Dreieck deb. Denn es ist Seite ac = bd, ferner Winkel edb = cae und ebd = eca als Wechselwinkel, folglich ec = eb und de = ae (vergl. § 44.)

§ 47. Aufgaben.

1) Aus zwei Linien a, b und einem Winkel c ein Parallelogramm zu construiren (Fig. 34.)

Fig. 34.



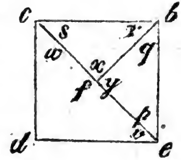
Auflösung. Man mache de = a, und lege etwa an d den Winkel c, mache df = b, und ziehe fg zu de, dann eg zu df parallel (§ 43, 9.), so ist dg das verlangte Parallelogramm. Oder zweitens, wenn df = b gemacht ist, so ziehe man fe und mache Dreieck cfg = efd (§ 43, 2.)

Zusatz 1. Wird der Winkel c an die größere Seite a getragen, so ergiebt sich dasselbe Parallelogramm, nur in anderer Lage (vergl. § 44. Zusatz 4.)

Zusatz 2. Ist c oder d ein rechter Winkel, so entsteht der Quadrat, oder das Rechteck, je nachdem d f und d e gleich oder ungleich sind; ist aber c oder d schief, so entsteht die Raute, oder das Rhomboid, je nachdem d f und d e gleich oder ungleich sind.

Folgesatz. Zu Construction eines Rhombus oder eines Rhomboids sind zwei Seiten und ein Winkel erforderlich; zu der eines Rechtecks sind nur zwei Seiten, und zu der eines Quadrats ist nur eine einzige Seite nöthig.

Fig. 35.



2) Die Seite eines Quadrats ist gegeben; man soll das Quadrat verzeichnen.

Auflösung. Man hat an dem einem Endpunkte der gegebenen Seite nach (§ 43.) eine Senkrechte zu errichten, dann das Weitere wie in vorhergehender Aufgabe zu verrichten.

3) Aus der gegebenen Diagonale d eines Quadrats dasselbe zu construiren (Fig. 35.)

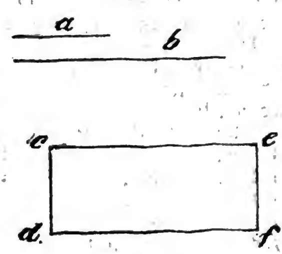
Auflösung. Man nehme e c der gegebenen Diagonale gleich, errichte in der Mitte f ein Perpendikel nach b, mache f b = f e = f c, ziehe b c und b e, und mache das Dreieck c d e = b c e, so ergiebt sich das verlangte Quadrat.

Beweis. Da f b = f e gemacht ist, so ist das Dreieck b e f gleichschenkelig, daher Winkel p = q.

Da nun nach der Construction Winkel x = y = R, so ist p = q = ½ R (§ 31.)

Ingleichen ist wegen y = R, der Winkel r = s = ½ R; folglich q = r. Daher q + r = R, also auch d = R. Endlich folgt auch, daß p = s = w = v, daher auch p + v = s + w = R ist, daß also alle vier Winkel rechte sind.

Fig, 36.



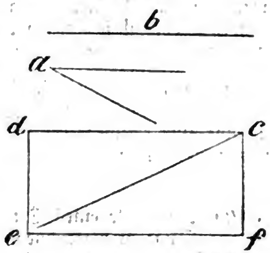
4) Aus zwei anstoßenden Seiten ein Rechteck zu verzeichnen.

Die Auflösung folgt aus Aufgabe 2.

5) Aus einer Seite und der Diagonale das Rechteck zu vollenden.

Auflösung. Es sei a die gegebene Seite und b die Diagonale (Fig. 36.) Man mache c d = a, errichte aus c und d Perpendikel in genugsamer Verlängerung und trage die Diagonale b von d auf das aus c errichtete Perpendikel. Von e, wo die Diagonale b dasselbe trifft, ziehe man e f parallel zu c d, so erhält man das verlangte Rechteck.

Fig. 37.



6) Aus einer Diagonale b und dem Winkel a, welchen dieselbe mit einer Seite des Rechtecks macht, dasselbe zu construiren (Fig. 37.)

Auflösung. Man ziehe c d in beliebiger aber genugsamer Verlängerung, trage die Diagonale b unter dem Winkel a an c, so daß c e = b werde.

Aus c fälle man das Perpendikel e d auf c d, ziehe c f mit d e und e f mit d c parallel, so ergiebt sich das verlangte Rechteck.

7) Wenn in einem Viereck die beiden Diagonalen einander halbiren, zu beweisen, daß es ein Parallelogramm ist. — (Vergl. § 46.)

8) Wenn in einem Viereck die gegenüberliegenden Seiten gleich sind, so soll bewiesen werden, daß es ein Parallelogramm ist.

Man beachte die Diagonale und § 33.

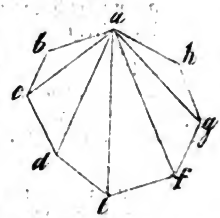
9) Wenn in einem Viereck zwei Seiten gleich und parallel sind, so soll bewiesen werden, daß es ein Parallelogramm ist.

Man ziehe die beiden Diagonalen und vergleiche § 32.

Von den Vielecken.

§ 48. Lehrsatz. Jede geradlinige Figur läßt sich durch Diagonalen, die einander nicht durchschneiden, in so viel Dreiecke zertheilen als die Figur Seiten hat weniger zwei.

Fig. 38.



Beweis. Es sei Fig. 38 ein beliebiges Achteck, bei dem die Diagonalen von a ausgehen, so macht die erste Diagonale a c mit zwei Seiten der Figur a b und b c, das erste Dreieck a b c; alsdann macht die zweite Diagonale a d, mit der Seite c d und der ersten Diagonale, das zweite Dreieck a c d; dann bildet die Diagonale a e mit der Seite d e und der zweiten Diagonale a d das dritte Dreieck a d e; eben so macht die Diagonale a f mit der Seite f e und der dritten Diagonale das vierte Dreieck a e f; ferner macht die letzte Diagonale a g mit f g und der vierten Diagonale a f das fünfte Dreieck; endlich macht die letzte Diagonale a g mit drei Seiten der Figur f g, g h, h a zwei Dreiecke a f g und a g h.

Zur Uebersicht mag folgende Tabelle dienen:

1)	2 Seiten	ab, bc,	und 1 Diagonale	ac	geben	1 Dreieck	abc.
2)	1 Seite	cd,	" 1 "	ad	"	1 "	acd.
3)	1 "	de,	" 1 "	ae	"	1 "	ade.
4)	1 "	ef,	" 1 "	af	"	1 "	aef.
5)	3 Seiten	fg, gh, ha,	" 1 "	ag	"	2 Dreiecke	afg u. agh.

Hier ist im ersten und letzten Fall 1 Seite mehr als Dreiecke, folglich zusammen 2 Seiten mehr als Dreiecke. In No. 2, 3, 4 aber ist 1 Seite, 1 Diagonale und 1 Dreieck.

Man sieht leicht ein, daß, so viel Seiten auch die Figur haben mag, jede folgende Diagonale mit einer Seite der Figur und der ihr vorher gehenden Diagonale ein neues Dreieck giebt, daß also in jeder vielseitigen Figur vom zweiten bis zum vorletzten Fall auf einer Seite, und eine Diagonale ein Dreieck kommt. Was dieses Achteck darstellt, gilt also von jedem Vieleck.

Zusatz 1. Da die Anzahl der Diagonalen außer dem letzten Falle der Anzahl der Dreiecke gleich ist, im letzten aber 1 weniger beträgt, so ist überhaupt die Anzahl der Diagonalen in einem Vieleck um 1 kleiner als die Anzahl der Dreiecke in der Figur, oder um 3 kleiner als die Anzahl ihrer Seiten, denn die Summe der ersten Reihe, oder die Summe der Seiten ist = 8, der zweiten Reihe oder die Summe der Diagonalen = 5 und die der dritten oder die Summe der Dreiecke = 6.

Zusatz 2. Bezeichnet man die Anzahl der Seiten einer geradlinigen Figur mit n, so ist die Anzahl der Dreiecke, die dadurch gebildet werden $= n - 2$, und die der Diagonalen $= n - 3$.

§ 49. Um die Summe der Diagonalen in einem Vieleck zu finden, wenn sie sich alle schneiden, dient folgende Ueberlegung:

In jedem Vieleck lassen sich aus jedem der zwei zunächst auf einander folgenden Winkelpunkte eine gleich große Anzahl Diagonalen ziehen, dann aber giebt jeder nächst folgende Winkelpunkt 1 Diagonale weniger als der zunächst vorhergehende. Wir haben also

im Viereck $2\,(4-3)$
" Fünfeck $2\,(5-3) + (5-4)$
" Sechseck $2\,(6-3) + (6-4) + (6-5)$
" Siebeneck $2\,(7-3) + (7-4) + (7-5) + (7-6)$
" Achteck $2\,(8-3) + (8-4) + (8-5) + (8-6) + (8-7)$.

In jedem dieser Ausdrücke nehmen die Glieder vom zweiten an nach der Ordnung um 1 ab, und das letzte Glied ist = 1. Ferner ist die Anzahl dieser Glieder in jedem Ausdrucke um 4 kleiner als die Seitenzahl des entsprechenden Vielecks. Daher ist allgemein die Anzahl der Dioganalen des necks

$$= 2\,(n-3) + (n-4) + (n-5) + (n-6) \ldots + 1.$$

Dieser Ausdruck vom zweiten Gliede an bildet also, wie die vorhergehenden Ausdrücke, eine arithmetische Progression, deren erstes Glied $= n - 4$, letztes $= 1$, und Anzahl der Glieder $= n - 4$ ist.

Die Summe dieser Progression ist demnach

$$= (n - 4 + 1).\,\frac{(n-4)}{2} = \frac{(n-3).\,(n-4)}{2}.$$

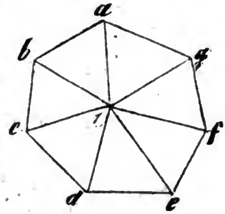
Die ganze Summe S der Diagonalen eines necks ist demnach

$$S = 2\,(n-3) + \frac{(n-3).\,(n-4)}{2} = \frac{n.\,(n-3)}{2}.$$

Für ein Dreieck ist $S = 0$, für ein Achteck $S = \frac{8.5}{2} = 20$,

für ein Hunderteck $S = \frac{100.\,97}{2} = 4850$.

Fig. 39.



§ 50. **Lehrsatz.** Die Summe aller Winkel in einem Vieleck beträgt noch einmal so viel rechte als die Figur Seiten hat, weniger 4 rechten.

Beweis 1. Es sei die Anzahl der Seiten $= n$, so ist die Anzahl der Dreiecke, in welche das Vieleck durch Diagonalen, die sich nicht schneiden, getheilt werden kann, $= n - 2$ (§ 48.), und die Summe der Winkel in jedem $= 2\,R$, folglich die Summe aller Winkel $= 2\,(n - 2)\,R = 2\,n\,R - 4\,R$.

Beweis 2. Man nehme einen beliebigen Punkt z innerhalb des Vielecks an (Fig. 39.), welches hier ein Siebeneck ist. Dann ziehe man von diesem Punkte Diagonalen z a, z b u. s. w., so wird das Vieleck in eben so viel Dreiecke zerlegt als die Figur Seiten hat. Da nun die Winkelsumme jedes Dreiecks $= 2\,R$ ist, so ist die Summe aller Winkel der Dreiecke im Siebeneck $= 7 \cdot 2\,R = 14\,R$, und im neck $= 2\,n\,R$. Nun sind aber die Winkel um den Punkt z, welche $4\,R$ betragen, noch abzuziehen; folglich ist die Summe der Winkel im Siebeneck $= 14\,R - 4\,R$, also im neck $= 2\,n\,R - 4\,R$.

Bemerk. Der Buchstabe z ist in der Figur nicht mit angezeigt.

Anm. Es ist übrigens gleichgiltig, an welcher Stelle innerhalb der Figur der Punkt z angenommen wird.

Erläuternde Anmerk. Unter Winkeln in einem Vieleck sind immer die Winkel an den Seiten zu verstehen d. h. die Winkel a b c, b c d, c d e u. s. w. und je zwei auf einander folgende Winkel haben immer eine Seite als Schenkel gemeinschaftlich. Solche Winkel heißen **Polygonwinkel.**

Zusatz 1. Die Summe der Polygonwinkel in Vielecken von gleich viel Seiten ist gleich groß, so ungleich auch die Seiten und so verschieden auch die Winkel sein mögen.

Zusatz 2. In jedem regelmäßigen Vieleck ist jeder Winkel so groß als die Summe aller, dividirt durch die Anzahl der Seiten, nämlich

$$= \frac{2\,n\,R - 4\,R}{n} = 2\,R - \frac{4\,R}{n}.$$

§ 51. Aufgaben.

1) Wie groß ist der Polygonwinkel im regelmäßigen Siebeneck?

Auflös. Nach obiger Formel ist $n = 7$, also $2\,R - \frac{4}{7}\,R = \frac{10}{7}\,R, = 1\frac{3}{7}\,R$.

2) Wie groß ist jeder Polygonwinkel im regelmäßigen Dreieck, Fünfeck, Hunderteck?

Antwort: $\frac{2}{3}\,R$, $1\frac{1}{5}\,R$, $1\frac{24}{25}\,R$.

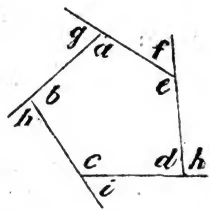
3) Es soll untersucht werden, ob die Summe der äußeren Winkel eines Vielecks überhaupt, wie f, g, h, i, k (Fig. 40.), welche entstehen, wenn man die Seiten über die Figur hinaus verlängert, in verschiedenen Vielecken verschieden sei oder nicht.

Auflösung. Es ist

$$\begin{aligned} a + g &= 2\,R \\ b + h &= 2\,R \\ c + i &= 2\,R \\ d + k &= 2\,R \\ e + f &= 2\,R. \end{aligned}$$

Also $(a + b + c + d + e) + (g + h + i + k + f) = 10\,R.$

Fig. 40.



Daher $g + h + i + k + f = 10\,R - (a + b + c + d + e)$.

Nun drückt aber das letzte Glied rechter Hand die Summe der inneren Winkel aus, die nach (§ 50.) gleich ist $2\,nR - 4\,R$, also hier im Fünfeck $= 10\,R - 4\,R = 6\,R$; folglich $g + h + i + k + f = 10\,R - 6\,R = 4\,R$.

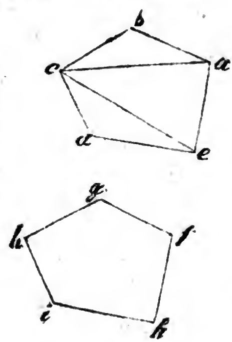
Die Summe der äußeren Winkel im Fünfeck ist also $= 4\,R$.

Es sei nun allgemein die Summe der äußeren Winkel eines necks $= S$, so ist nach Vorhergehendem und nach (§ 50.)
$S = 2\,nR - (2\,nR - 4\,R) = 2\,nR - 2\,nR + 4\,R = 4\,R$.

Die Summe der äußeren Winkel in jedem Vieleck ist demnach $= 4\,R$, also einer beständigen Größe gleich.

Anm. Das Glied $2\,nR$ in der letzten Gleichung kann man vergleichen mit dem Gliede $10\,R = 2, 5\,R$ in vorhergehender Gleichung für das Fünfeck.

Fig. 41 a und b.

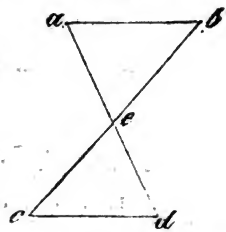


4) Ein Vieleck zu verzeichnen, daß einem gegebenen gleich sei.

Auflösung. Man kann hier auf verschiedene Weise verfahren; entweder man zertheilt die Figur durch Diagonalen in Dreiecke wie (Fig. 41 a) und construirt die einzelnen Dreiecke in derselben Ordnung nach einander, wie sie sich in der Figur befinden; oder man macht irgend eine Seite z. B. $fg = ab$ (Fig. 41 b), legt dann $gh = bc$ unter dem Winkel b an gf (§ 32.), dann $hi = cd$ unter dem Winkel bcd an h u. s. w.

Vermischte Aufgaben, die sich auf vorhergehende Sätze beziehen.

Fig. 42.



5) Die Entfernung zweier Punkte a und b auf dem Felde, welche man nicht unmittelbar messen kann, blos mit Kette und Stäben zu finden (Fig. 42).

Auflösung. Man nehme einem außerhalb der Linie a b befindlichen Standpunkt e beliebig an.

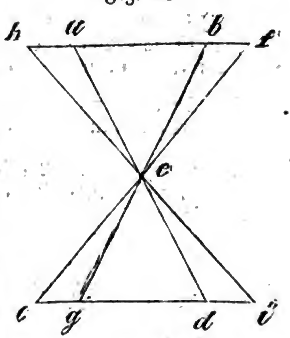
Es können nun drei verschiedene Fälle vorkommen:

I. Wenn man von e nach beiden Endpunkten der Linie a b messen kann.

Man messe die Linie a e und b e, verlängere beide rückwärts nach c und d, mache e c = e b und e d = a e, dann ziehe man c d, so ist c d die gesuchte Länge = a b.

Der Beweis erhellet aus § 30.

Fig. 43.



II. Wenn man von e aus nur nach einem Endpunkte b der Entfernung a b messen kann.

Man bringe einen Punkt f, der in beliebiger doch nicht zu großer Entfernung von b sein kann, mit a b in eine gerade Linie (Fig. 43.); verlängere b e und f e rückwärts nach g und c hin, mache e g = e b, e c = e f und bringe d in eine gerade Linie mit c g, so ist g d die gesuchte Länge = a b.

Beweis. Es ist in den beiden Dreiecken a e f und c e d, Winkel a e f = c e d als Scheitelwinkel, dann ist Winkel a f e = e c d, weil die beiden Dreiecke c e g und b e f nach I. einander congruent sind, endlich ist c e = e f, folglich Dreieck c e d = a e f (§ 32.) und daher c d = a f. Da nun nach I. c g = b f, so ist auch g d = a b.

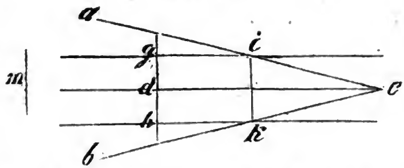
III. Wenn man von e aus weder nach a noch nach b messen kann.

Man nehme 1) wieder den Punkt f an Fig. 43, der mit a b in gerader Linie gebracht ist, ziehe f e, verlängere sie und mache e c = e f.

2) Man nehme einen beliebigen Punkt h an, der mit a b in gerader Linie liegt, ziehe h e, verlängere sie rückwärts und mache e i = e h und messe c i, so ist c i gleich der Entfernung h f. Man mache ferner c g = b f und d c = a h, so ist g d = a b.

Der Beweis leuchtet aus Vorhergehendem ein.

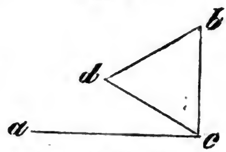
Fig. 44.



6) Eine gegebene Linie m so zwischen die Schenkel eines gegebenen Winkels a c b zu tragen, daß dadurch ein gleichschenkeliges Dreieck entstehe (Fig. 44).

Auflös. Man halbire den Winkel a c b, und aus einem beliebigen Punkte d der Halbirungslinie errichte man Perpendikel und mache d g = d h = ½ m, aus g und h ziehe man Parallellinien mit d c, dann verbinde man die Punkte i und k, in welchen die Schenkel des Winkels von den Parallelen geschnitten werden mit einer geraden Linie i k, so ist diese = m.

Fig. 45.

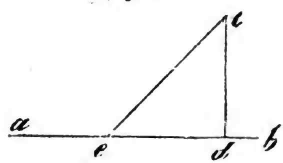


7) Unter voriger Voraussetzung die Linie m so zwischen die Schenkel zu legen, daß dadurch ein rechtwinkeliges Dreieck entsteht.

8) Einen rechten Winkel in drei gleiche Theile zu theilen.

Auflösung. Man errichte über dem einen Schenkel des rechten Winkels innerhalb desselben ein gleichseitiges Dreieck b c d (Fig. 45), so ist Winkel a c d der dritte Theil eines rechten Winkels (§ 58, Aufg. 2).

Fig. 46.



9) Wenn über einer geraden Linie a b ein Punkt c gegeben ist, von diesem eine Linie c e so auf a b zu ziehen, daß der eine Nebenwinkel dreimal so groß als der andere werde (Fig. 46).

Auflös. Aus c fälle man c d senkrecht auf a b, mache d e = d c und ziehe c e so ist Winkel c e a = 3 c e d (vergl. § 17 mit 26 u. 31).

10) Ein Parallelogramm aus einem gegebenen Punkte in der Seite in 2 gleiche Theile zu theilen.

Man halbire das Parallelogramm zuerst durch eine Parallellinie, diese halbire man, und ziehe durch ihre Mitte aus dem gegebenen Punkte eine gerade Linie.

11) Ein Trapezium in ein Parallelogramm zu verwandeln.

Man ziehe durch die Mitte der beiden nicht parallelen Seiten Senkrechte auf die parallelen Seiten, und vollende das Uebrige.

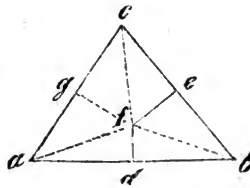
12) Innerhalb eines Dreiecks den Punkt zu finden, aus welchem die Perpendikel auf die Seiten einander gleich sind.

Man hat hier zunächst zwei Winkel zu halbiren; das Uebrige ergiebt sich von selbst.

13) Innerhalb eines spitzwinkeligen Dreiecks den Punkt zu finden, von welchem die geraden Linien nach den Winkeln einander gleich sind.

Auflösung. Man halbire zwei Seiten, a b in d und b c in e, errichte aus d und e Senkrechte, so ist der Punkt f, wo sich die Senkrechten schneiden, der verlangte Punkt (Fig. 47. Seite 26).

Fig. 47.

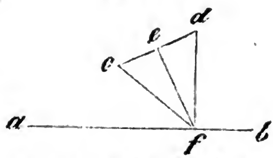


Beweis. Da b c durch e halbirt und e f senkrecht auf b c ist, so muß, wenn man die Linien f b und f c zieht, das Dreieck b c f gleichschenkelig sein (§ 30), folglich ist f c = f b; in gleicher Weise ist das Dreieck a f b gleichschenkelig, daher auch a f = f b, folglich auch a f = f c.

Zusatz 1. Halbirt man a c in g und errichtet innerhalb des Dreiecks aus g ein Perpendikel, so muß auch dieses in den Punkt f treffen.

Zusatz 2. Bei einem stumpfwinkeligen Dreieck fällt der Punkt f außerhalb desselben und bei dem gleichschenkeligen rechtwinkeligen in die Grundlinie oder Hypotenuse.

Fig. 48.



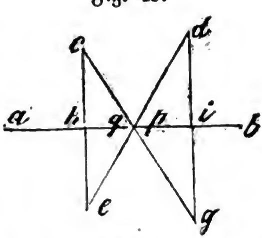
14) Wenn über einer geraden Linie a b, zwei Punkte c und d, in ungleicher Entfernung gegeben sind, in der Linie a b den Punkt f zu finden, nach welchem die 2 Linien c f und d f, von c aus d gezogen, einander gleich sind (Fig. 48).

Auflösung. Man verbinde die beiden Punkte mit einer geraden Linie, ziehe aus ihrer Mitte e eine Senkrechte, bis sie a b in f trifft, so ist f der verlangte Punkt; und zieht man c f und d f, so sind beide Linien einander gleich.

Denn es ist Dreieck c d f gleichschenkelig (§.43, Aufg. 11), folglich c f = d f.

Anm. Die Punkte c und d dürfen jedoch nicht so liegen, daß eine gerade Linie durch sie gezogen, auf a b senkrecht steht.

Fig. 49.



15) Unter der vorigen Voraussetzung auf der Linie a b den Punkt zu finden, nach welchem ein Paar gerade Linien, von c und d gezogen, gleiche Winkel mit a b bilden (Fig. 49).

Auflösung. Man ziehe c e und d g senkrecht durch a b, mache h c = h e, i g = i d, ziehe d e und c g; und da, wo sich beide Linien durchschneiden, ist der gesuchte Punkt, den wir mit f bezeichnen wollen, ferner ist Winkel p = q.

Beweis. Da c e parallel mit d g, so ist Winkel d = e, und c = g als Wechselwinkel. Da nun nach der Construction i g = i d, und h e = h c, so ist auch c g = d e, daher auch Winkel g = d, und e = c, folglich c f = e f, und d f = g f, daher liegt der Punkt f in der Linie a b.

Da nun in den Dreiecken h c f und i d f bei h und i rechte Winkel sind, so ist auch wegen c = g = d der Winkel q = p.

16) Ein Parallelogramm zu verfertigen, das einen viermal größeren Umfang hat als ein gegebenes gleichschenkeliges Dreieck.

Dritter Abschnitt.

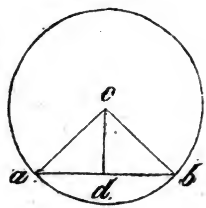
Vom Kreise.

Linien im Kreise.

§ 52. Lehrsatz. Ein Perpendikel aus dem Mittelpunkte des Kreises auf eine Sehne desselben gefällt, halbirt diese.

Beweis. Es sei (Fig. 50.) der Mittelpunkt eines Kreises und c d senkrecht auf a b. Man ziehe c a und c b, so ist a b c ein gleichschenkeliges Dreieck, und daher a b durch c d halbirt (§ 43. Aufg. 3).

Fig. 50.



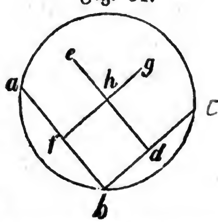
Zusatz 1. Eine gerade Linie aus dem Mittelpunkte des Kreises auf die Mitte der Sehne gezogen, steht senkrecht auf ihr.

Zusatz 2. Ein Perpendikel durch die Mitte einer Sehne gezogen, geht durch den Mittelpunkt des Kreises.

Aufgabe. Den Mittelpunkt eines Kreises zu finden.

Auflösung. Man ziehe in dem gegebenen Kreise zwei beliebige Sehnen, a b, b c (Fig. 51.), die jedoch nicht parallel laufen, halbire sie und errichte aus ihrer Mitte Perpendikel f g, d e. In dem Punkte h, wo sich beide Perpendikel durchschneiden, ist des Kreises Mittelpunkt.

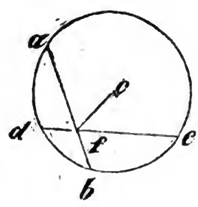
Fig. 51.



Beweis. Da nach dem letzten Zusatze die Perpendikel durch den Mittelpunkt gehen, so muß der Punkt, in welchem sie sich schneiden, der Mittelpunkt des Kreises sein.

§ 53. Lehrsatz. Zwei einander sich schneidende Sehnen a b, d e können einander nicht halbiren (Fig. 52).

Fig. 52.



Beweis. Wäre der Durchschnitt f die Mitte beider Sehnen, so müßte, wenn man den Mittelpunkt c sucht, und f c zieht, c f senkrecht auf d e und a b, daher zugleich Winkel c f d und c f a, ferner auch Winkel c f e und c f b zugleich ein rechter sein, welches unmöglich ist.

Anm. Wären beide Seiten parallel, so würden die Perpendikel in einander fallen.

§ 54. Aufgabe. Durch drei gegebene Punkte a, b, c (Fig. 51.), die nicht in einer geraden Linie liegen, einen Kreis zu beschreiben.

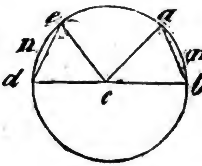
Auflösung. Man verbinde die drei Punkte durch zwei gerade Linien a b, b c; und durch die Mitte derselben ziehe man die Perpendikel d e, f g. Der Punkt h, wo diese sich schneiden, ist der Mittelpunkt des Kreises.

Beweis. Man kann die Linien a b, b c als Sehnen eines Kreises betrachten; folglich schneiden die Perpendikel, durch ihre Mitte gezogen, einander im Mittelpunkte des Kreises (§ 52).

Anm. Anstatt der drei Punkte kann man auch ein Dreieck nehmen, dann lautet die Aufgabe: Um ein Dreieck einen Kreis zu beschreiben.

Zusatz 1. Drei Punkte, die nicht in gerader Linie liegen, bestimmen eines Kreises Mittelpunkt und Halbmesser.

Fig. 53.



§ 55. Lehrsatz. Gleiche Sehnen eines Kreises haben gleiche Bogen.

Beweis. Es sei a b = e d (Fig. 53.); man ziehe e c, d c, a c, b c, so ist Dreieck c d e = a b c. Man denke sich nun den Ausschnitt e c d n so auf a c b m gelegt, daß die Dreiecke c e d, c a b einander decken, so muß auch der Bogen e n d auf a m b fallen.

Zusatz 1. Gleiche Bogen eines Kreises haben gleiche Sehnen.

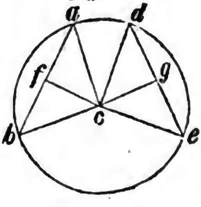
Zusatz 2. Gleichen Sehnen und Bogen eines Kreises liegen gleiche Winkel am Mittelpunkte gegenüber; und umgekehrt gehören in einem Kreise zu gleichen Winkeln am Mittelpunkte gleiche Sehnen und gleiche Bogen.

Zusatz 3. Zu der größeren Sehne eines Kreises gehört ein größerer Bogen und ein größerer Winkel am Mittelpunkte; und so umgekehrt.

Anm. Zu jeder Sehne gehören eigentlich zwei Bogen, nämlich: der Sehne a b gehört sowohl der Bogen a m b, als auch der übrige Theil der Peripherie oder a d b, und beide Bogen machen jedesmal den ganzen Kreisumfang aus. Es ist aber hier nur immer von dem kleineren der beiden Bogen die Rede, der also kleiner als der Halbkreis ist, nämlich von a m b.

Zusatz 4. Unter allen Sehnen eines Kreises ist der Durchmesser die größte.

Fig. 54.



§ 56. Lehrsatz. Gleiche Sehnen eines Kreises haben gleichen Abstand vom Mittelpunkte.

Beweis. Es sei die Sehne a b = d e (Fig. 54.); man fälle die Perpendikel c f, c g und ziehe a c, d c, so ist a f = d g. Da nun auch a c = d c ist, und bei f rechte Winkel sind, so ist Dreieck a f c = c g d, folglich auch f c = g c.

Zusatz 1. Sehnen eines Kreises, die gleichen Abstand vom Mittelpunkte haben, sind einander gleich.

Zusatz 2. Je größer die Sehne eines Kreises, desto kleiner ist ihr Abstand vom Mittelpunkte, und je kleiner die Sehne desto größer ist der letztere.

Zusatz 3. Umgekehrt, je kleiner der Abstand der Sehne eines Kreises vom Mittelpunkte, desto größer ist die Sehne, und so umgekehrt.

Zusatz 4. Ist der Abstand der Sehne vom Mittelpunkte = o, so ist dieselbe am größten, also dem Durchmesser selbst gleich.

Das Maß des Winkels.

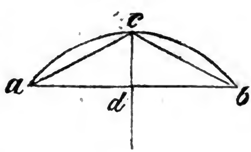
§ 57. Es ist bereits oben (§ 6.) bemerkt worden, daß die Größe eines Winkels keineswegs von der Länge seiner Schenkel, sondern von dem Grade der Neigung derselben gegeneinander abhängt. Um aber diesen Grad in einem bestimmten Maße anzugeben, hat man füglich den Kreis zum Grunde gelegt.

Man beschreibt nämlich aus dem Scheitel des Winkels als dem Mittelpunkt, einen beliebigen Kreis, dann ist der Bogen, den die Schenkel des Winkels zwischen sich fassen, das Maß des Winkels. Wenn ein solcher Bogen z. B. den zehnten Theil des ganzen Kreises ausmacht, so ist auch der entsprechende Winkel gleich dem zehnten Theil der Summe der Winkel um einen Punkt herum. Der rechte Winkel hat den vierten Theil des Kreises, welcher auch Quadrant heißt, zu seinem Maße (vergl. den sechsten Abschnitt).

§ 58. Aufgaben.

1) Einen Kreisbogen zu halbiren.

Fig. 55.



Auflösung. Es sei der zu theilende Bogen acb (Fig. 55.); man ziehe die Sehne ab, und durch ihre Mitte das Perpendikel cd, so halbirt dieses auch den Bogen.

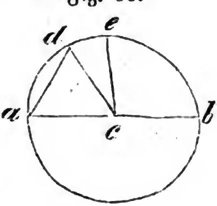
Beweis. Man ziehe ac, bc, so ist Dreieck adc = bdc, folglich ac = bc, also auch Bogen ac gleich dem Bogen bc.

Zusatz. Durch fortgesetztes Halbiren eines jeden Theils wird der ganze Bogen in 4, 8, 16 u. s. w. gleiche Theile getheilt.

Anm. Die Theilung des Bogens in mehrere gleiche Theile ist mit der Aufgabe einerlei, einen Winkel eben so zu theilen und hat daher dieselben Schwierigkeiten wie letztere. Wohl aber läßt sich der Quadrant, der Halbkreis oder der ganze Kreis in drei gleiche Theile theilen, wie sogleich erhellen wird.

2) Den Quadranten oder den rechten Winkel in drei gleiche Theile zu theilen.

Fig. 56.

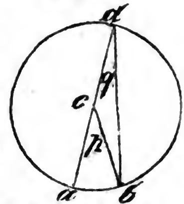


Auflösung. Es sei ade der gegebene Quadrant (Fig. 56.); man trage den Radius ac an den Quadranten so, daß ad = ac werde, so ist Bogen de = $\frac{1}{3}$ R, und da = $\frac{2}{3}$ R.

Beweis. Da ad = dc = ac, so ist Dreieck acd gleichseitig, daher jeder Winkel desselben = $\frac{2}{3}$ R, folglich Winkel dce oder Bogen de = $\frac{1}{3}$ R (vergl. Aufg. 8, S. 25).

§ 59. **Lehrsatz.** Der Winkel am Mittelpunkt eines Kreises ist noch einmal so groß als der Winkel an der Peripherie, der mit ihm auf demselben Bogen steht.

Fig. 57.

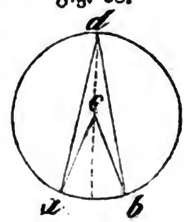


Erster Fall, wo der Mittelpunkt c in den einen Schenkel a d des Peripheriewinkels fällt (Fig. 57).

Beweis. Es sei p der Winkel am Mittelpunkte, und q der Winkel an der Peripherie, so ist p als ein äußerer Winkel des gleichschenkeligen Dreiecks b c d anzusehn,

daher p = b + d. Nun ist aber auch b = d, d. i. b = q
folglich p = 2 q.

Fig. 58.

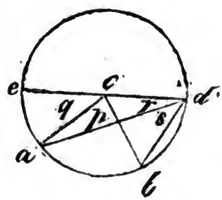


Zweiter Fall, wo c zwischen die Schenkel des Peripheriewinkels fällt (Fig. 58).

Beweis. Man ziehe eine Hülfslinie von d durch c bis auf den Bogen a b, und bezeichne den Punkt, wo diese den Bogen trifft, mit e, so haben wir zwei Fälle wie der vorhergehende, also ist demzufolge

W. a c e = 2 a d e, ingleichen e c b = 2 e d b, folglich
W. a c b = 2 a d e + 2 e d b = 2 a d b.

Fig. 59.

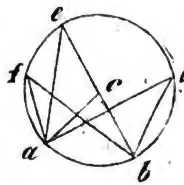


Dritter Fall, wo c außerhalb der Schenkel des Peripheriewinkels fällt (Fig. 59).

Beweis. Man ziehe von d durch c die Hülfslinie d e, so ist wieder wie im ersten Fall

Winkel e c b = 2 e d b
oder p + q = 2 (r + s) = 2 r + 2 s
es ist aber auch q = 2 r
folglich p = 2 s.

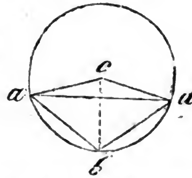
Fig. 60.



Zusatz 1. Wenn anstatt eines Peripheriewinkels zwei oder mehrere sind, die mit einem Centriwinkel auf demselben Bogen stehen, so ist auch der letztere doppelt so groß als jene zusammengenommen. Z. B. der Centriwinkel a c b ist doppelt so groß als f, e, d zusammengenommen (Fig. 60).

Eben so sind zwei oder mehrere Peripheriewinkel, wenn sie auf verschiedenen Bogen stehen, und die Summe dieser Bogen gleich ist dem Bogen, auf welchem der Centriwinkel steht, zusammengenommen halb so groß als der letztere.

Fig. 61.



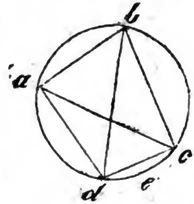
Nämlich in (Fig. 61.) ist Winkel a d b + d a b = ½ a c d: denn man ziehe eine Hülfslinie c b, so ist Winkel a c b = 2 a d b, weil beide Winkel auf demselben Bogen a b stehen; ingleichen ist aus demselben Grunde Winkel b c d = 2 b a d.

Zusatz 2. Die Hälfte des Bogens, auf welchem der Peripheriewinkel steht, ist sein Maß, oder bestimmt die Größe desselben.

Zusatz 3. Peripheriewinkel, die auf gleichen Bogen stehen, sind einander gleich, z. B. in Fig. 60. ist Winkel d = e = f.

Zusatz 4. Gleiche Peripheriewinkel schließen gleiche Bogen zwischen ihre Schenkel; eben so sind die Sehnen gleich, welche von gleichen Peripheriewinkeln zwischen ihre Schenkel gefaßt werden.

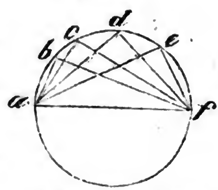
Fig. 62.



Zusatz 5. Zwei Winkel in entgegengesetzten Abschnitten wie b a d und b c d sind zusammen zwei rechten Winkeln gleich (Fig. 62.): denn sie stehen auf dem ganzen Umkreise, folglich ist der Halbkreis ihr Maß.

Zusatz 6. Sind die entgegengesetzten Abschnitte einander gleich, so sind auch die Winkel in beiden einander gleich, folglich jeder gleich einem rechten. Ist a d f ein Halbkreis (Fig. 63.), so sind die Winkel b, c, d, e alle rechte.

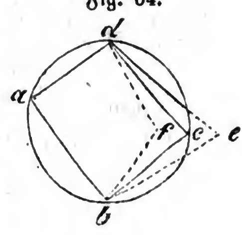
Fig. 63.



Zusatz 7. Der Winkel im größeren Abschnitt ist spitz und der im kleineren stumpf: z. B. in Fig. 62. ist a b c der größere und a d c der kleinere Abschnitt, also ist Winkel b spitz und d stumpf.

Zusatz 8. Je zwei Gegenwinkel eines Vierecks, dessen Seiten Sehnen eines Kreises sind, betragen zusammen zwei rechte Winkel; z. B. in Fig. 62. ist a + c = 2 R, und auch b + d = 2 R. Denn sowohl a + c als auch b + d, jede für sich, stehen zusammen auf dem ganzen Kreise, folglich ist der Halbkreis ihr Maß; daher a + c = b + d = 2 R.

Fig. 64.



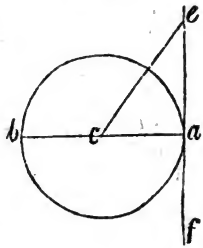
§ 60. Lehrsatz. Umgekehrt, wenn die Summe der gegenüberliegenden Winkel in einem Viereck gleich zwei rechten ist, so läßt sich ein Kreis um das Viereck beschreiben.

Beweis. Es sei a b c d ein Viereck, in welchem a + c = b + d = 2 R sei (Fig. 64.; man beschreibe durch die Winkelpunkte d, a, b einen Kreisbogen d a b. Gesetzt nun, der vollendete Kreis ginge nicht durch c, sondern durch e oder durch f, so müßte auch a + f = 2 R, folglich f = c sein, welches unmöglich ist.

Tangenten des Kreises.

§ 61. Erklärung. Eine Tangente ist eine gerade Linie, die mit einer krummen, also hier mit dem Kreise nur einen einzigen Punkt gemein hat, und auch, verlängert, denselben nicht schneidet. — Auch krumme Linien berühren einander, wenn sie, ohne einander zu schneiden, einen Punkt gemein haben, — Tangente heißt Berührungslinie.

Fig. 65.



§ 62. Lehrsatz. Ein Perpendikel auf den Endpunkt eines Halb- oder Durchmessers errichtet, ist eine Tangente am Kreise.

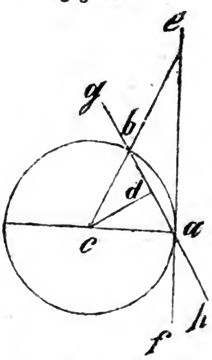
Beweis, Da ae senkrecht ist auf ac (Fig. 65.), so ist ac die kürzeste Linie, welche von c nach ae gezogen werden kann, daher liegt jeder andere Punkt von ae mit Ausnahme des Punktes a außerhalb des Kreises d. h. ae ist eine Tangente des Kreises.

Zusatz 1. Ein Halbmesser oder Durchmesser, an den Berührungspunkt einer Tangente gezogen, macht mit ihr einen rechten Winkel.

Zusatz 2. Ein Perpendikel auf die Tangente im Berührungspunkte geht durch den Mittelpunkt des Kreises.

Anmerk. Verlängert man die Tangente nach f hin, so ist af ebenfalls eine Tangente; auch wird die ganze Linie ef eine Tangente genannt.

Fig. 66.



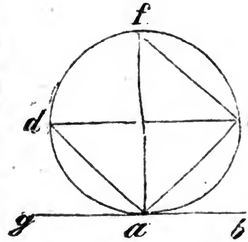
§ 63. Lehrsatz. Durch den Berührungspunkt a kann zwischen der Tangente und dem Kreise keine gerade Linie gezogen werden; sondern jede andere gerade wie gh schneidet den Kreis in zwei Punkten a und b (Fig. 66).

Beweis. Da ca nach der Annahme nicht zugleich auf gh senkrecht sein kann, so muß es auf gh einen Punkt geben, der noch näher an c liegt als a; man ziehe cd senkrecht auf ab, so ist es der Punkt d (vergl. § 43.), ferner ist das Dreieck acd rechtwinkelig und ca die Hypotenuse, welche an Größe die beiden Katheten übertrifft d. h. es ist ac größer als cd. Da nun ca zugleich ein Radius des Kreises ist, so muß d innerhalb des Kreises liegen. Wenn nun sonach die Linie gh durch einen Punkt innerhalb des Kreises weggeht, so muß sie den Kreis schneiden.

Zusatz 1. An einen Punkt a der Peripherie ist nur eine einzige Tangente möglich.

Zusatz 2. Eine gerade Linie kann einen Kreis in nicht mehr als zwei Punkten schneiden,

Fig. 67.



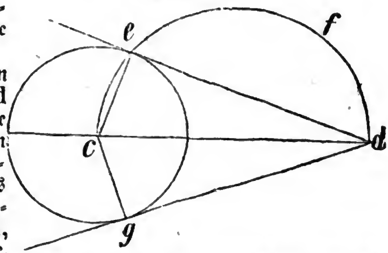
§ 64. **Lehrsatz.** Der Winkel e a b, den die Tangente b g mit der Sehne des Kreises, a e macht, ist dem Winkel d im entgegengesetzten Abschnitte gleich (Fig. 67).

Beweis. Vom Berührungspunkte a ziehe man die Hülfslinie a f durch den Mittelpunkt, so steht dieselbe senkrecht auf der Tangente und ist folglich ein Durchmesser (§ 62. u. s. w.) Ferner ziehe man die Hülfslinie f e, so ist Winkel f e a = R. Da nun auch Winkel f a e + e a b = R, so ist folglich f = e a b; nun aber ist auch d = f (§ 59.), folglich auch d = e a b (vergl. § 59, Zusatz 6).

Zus. Eben so läßt sich darthun, daß Winkel d a g = d e a ist.

§ 65. Aufgaben, die sich auf Sätze dieses Abschnitts beziehen.

Fig. 68.

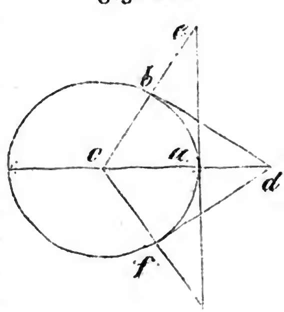


1) Von einem Punkte d außerhalb des Kreises eine Tangente an letzteren zu legen.

Erste Auflösung. Man ziehe von dem gegebenen Punkte d eine Gerade c d (Fig. 68.), nehme sie als Durchmesser, eines zweiten Kreises und beschreibe über demselben den Halbkreis c e f d. Aus e, wo sich beide Kreise durchschneiden, ziehe man die Gerade e d, so ist diese die verlangte Tangente.

Beweis. Man ziehe e c, so ist Winkel c e d ein rechter (§ 59, Zus. 6), folglich e d eine Tangente.

Fig. 69.



Zweite Auflösung. Man errichte in (Fig. 69.) aus dem Berührungspunkte a ein Perpendikel nach e, mache a e = c d und ziehe e c; aus b, wo der Kreis von e c geschnitten wird, ziehe man b d, so ist b d eine Tangente.

Beweis. In beiden Dreiecken a c e und b c d ist a e = c d; ferner ist im Dreieck b c d, die Seite b c gleich der Seite a c im Dreieck a c e; dann ist Winkel b c a, da er beiden gemeinschaftlich ist, sich selbst gleich.

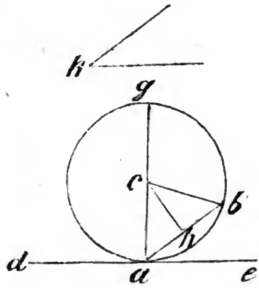
Folglich sind beide Dreiecke einander congruent (§ 40.); und da auch a e auf a c senkrecht, also bei a ein rechter Winkel ist, so muß auch b d auf b c senkrecht sein, daher ist b d eine Tangente des Kreises.

Anmerk. Die Tangente kann auch eben so gut nach der anderen Seite hin, in Fig. 68. von d nach g und in Fig. 69. von d nach f gezogen werden.

2) Ueber einer gegebenen geraden Linie a b einen Kreisabschnitt zu beschreiben, der einen gegebenen Winkel k faßt (Fig. 70).

Auflösung. Man lege an die Linie k den Winkel a b, so daß b a e = k werde; alsdann errichte man aus dem Punkte a auf a e eine Senkrechte a g; ferner halbire man a b, und errichte aus der Mitte h ebenfalls eine Senkrechte so weit bis sie a g in c trifft, so ist c der Mittelpunkt des Kreises, dessen Halbmesser c a ist. Mit demselben beschreibe man einen Kreis, so ist a b der verlangte Abschnitt.

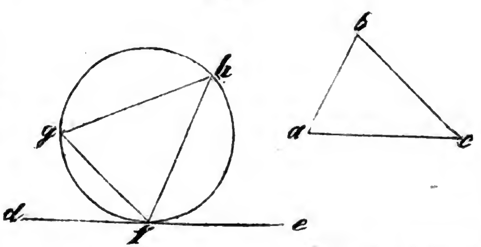
Fig. 70.



Beweis. Man ziehe b c, so ist, da bei h rechte Winkel, dann b c wie a c Halbmesser des Kreises sind, a h = b h d. h. es ist a b eine Sehne des Kreises und der Abschnitt der verlangte.

3) In einen gegebenen Kreis ein Dreieck zu beschreiben, welches mit einem gegebenen gleiche Winkel habe.

Fig. 71.



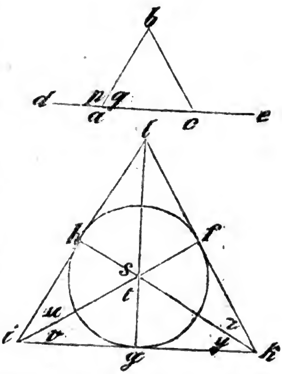
Auflös. Es sei Fig. 71. der gegebene Kreis und das gegebene Dreieck; man lege nun an einen beliebigen Punkt f des Kreises eine Tangente, und trage an den Berührungspunkt f zwei beliebige Winkel des Dreiecks etwa so, daß h f e = a und g f d = c werde, dann ziehe man g h, so ist g h f das verlangte Dreieck.

Beweis Es ist Winkel h f e = g = a, und g f d = h = c (§ 64.), folglich muß der dritte Winkel g f h = b sein.

4) Um einen Kreis ein Dreieck zu beschreiben, welches mit dem gegebenen a b c gleichwinkelig sei (Fig. 72).

Auflös. Man verlängere eine beliebige Seite a c des gegebenen Dreiecks nach d und e hin, trage beide Winkel d a b und b c e an des Kreises Mittelpunkt, so daß h c g = d a b und g c f = b c e werde. Durch die Punkte f, g, h lege man Tangenten, die sich in k, l und i treffen, so ist i k l das verlangte Dreieck.

Fig. 72.



Beweis. Da die Winkel des Vierecks h i g c zusammen = 4 R, und bei h und g rechte sind, so ist u + v + s + t = 2 R. Es ist aber auch im Dreieck a b c, p + q = 2 R, folglich

$$u + v + s + t = p + q.$$

Nun war aber Winkel p an c getragen, also ist p = s + t, folglich

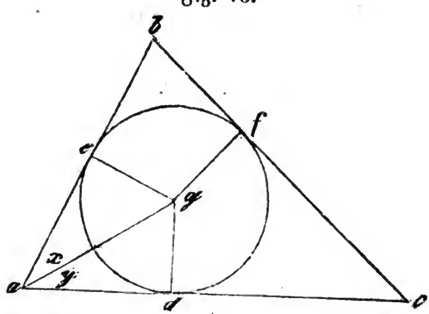
$$u + v + p = p + q;\ \text{daher}\ u + v = q.$$

Eben so läßt sich beweisen, daß Winkel g k f oder y + z = v, und folglich i l k = b ist.

5) In ein gegebenes Dreieck a b c einen Kreis zu beschreiben (Fig. 73).

Auflösung. Man halbire zwei Winkel, etwa b a c und a c b; aus dem Punkte g, wo sich die Halbirungslinien schneiden, ziehe man g f, g d, g e senkrecht auf b c, a c, a b, so sind diese Senkrechten alle einander gleich, und können als Halbmesser eines Kreises betrachtet werden, zu welchem a b, b c, a c Tangenten sind.

Fig. 73.



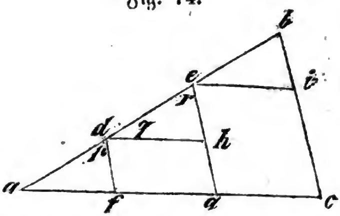
Beweis. Da Winkel x = y, dann bei e und d rechte Winkel sind, und Seite a g sich selbst gleich ist, so sind beide Dreiecke a g e, a g d einander congruent; folglich g e = g d. — Eben so läßt sich darthun, daß g e = g f ist, folglich die drei Perpendikel einander gleich sind.

Vierter Abschnitt.

Von der Aehnlichkeit der geradlinigen Figuren, insbesondere der Dreiecke.

§ 66. Erklärung. Aehnliche Figuren überhaupt sind solche, die einerlei Gestalt haben oder, mit anderen Worten: von zwei ähnlichen Figuren erscheint die eine gegen die andere in einem vergrößerten oder verkleinerten Maßstabe. Die verschiedenen Bedingungen, die bei der Aehnlichkeit der Figuren vorkommen, werden durch nachstehende Sätze erläutert.

Fig. 74.



§ 67. Lehrsatz. Wenn man eine gerade Linie a b in eine beliebige Anzahl gleicher z. B. in drei Theile a d, d e, e b theilt, und eine zweite Linie a c von willkürlicher Länge unter irgend einem Winkel a an a b legt, dann e g, d f mit b c parallel zieht, so wird dadurch auch a c in eben so viel gleiche Theile a f, f g, g c getheilt (Fig. 74).

Beweis. Man ziehe e i und d h parallel mit a c, so sind die Winkel p und r, als auch q und h e i als correspondirende Winkel einander gleich; und da auch (nach der Construction) a d = d e, so sind die Dreiecke a d f, d e h einander congruent; folglich a f = d h. Nun ist aber auch d h = f g (§ 44. ꝛc.), folglich f g = a f. — Eben so läßt sich darthun, daß g c = f g = a f ist.

Nun ist nach der Annahme $ad = \frac{1}{3}\,ab$

ingleichen $af = \frac{1}{3}\,ac$

folglich $ad : af = \frac{1}{3}\,ab : \frac{1}{3}\,ac$,

daher auch $ad : af = ab : ac$.

Zusatz 1. Wird a b sowohl als a c in m gleiche Theile getheilt, so ist $\frac{1}{m} \cdot ab$ ein Theil von a b, und $\frac{1}{m} \cdot ac$ ein solcher von a c. Bezeichnet man beide nach der Reihe mit p und q, so ist

$$p : q = \frac{1}{m} \cdot ab : \frac{1}{m} \cdot ac$$

daher auch $p : q = ab : ac$.

Die Linien a b, a c mögen auch in noch so viel gleichen Theilen bestehen, so bleibt das Verhältniß zwischen ihnen und zwischen ihren Theilen immer das nämliche, d. h. ein Theil der einen Linie ist so vielmal größer oder kleiner, als ein Theil der anderen Linie, so vielmal jene ganze Linie größer oder kleiner als diese ist.

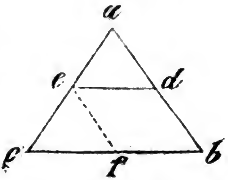
Wenn z. B. a c 1½mal größer als a b ist, so ist auch a f 1½mal größer als a d; und wird a b und a c jede z. B. in 100 gleiche Theile getheilt, so ist ein Hundertel von a c eben sowohl 1½mal größer als ein Hundertel von a b.

Zusatz 2. Es verhält sich auch eine gewisse Anzahl der gleichen Theile von a b zu einer gleich großen Anzahl der gleichen Theile von a c, wie a b zu a c. — Wird diese Anzahl mit s bezeichnet, so ist

$$sp : sq = ab : ac.$$

§ 68. Lehrsatz. Wenn in einem Dreieck a b c (Fig. 75.) eine Linie d e parallel mit der Grundlinie b c gezogen wird, so verhalten sich sowohl die oberen als die unteren Abschnitte beider Seiten zu einander wie die ganzen Seiten, nämlich:

Fig. 75.



$$ad : ae = ab : ac$$

und auch $db : ec = ab : ac$.

Beweis. Man nehme an, a b sei in eine beliebige Anzahl gleicher Theile getheilt und von den Theilungspunkten Parallellinien mit b c auf a c gezogen, so wird dadurch a c in eben so viel gleiche Theile getheilt, als a b (§ 66). Es falle nun ein Theilungspunkt etwa in d, so ist d e eine dieser Parallellinien, über dieser liegen also eine gleich große Anzahl der gleichen Theile beider Linien. Folglich ist 1) $ad : ae = ab : ac$.

Eben so liegen unter d e d. i. zwischen d e und b c eine gleich große Anzahl der gleichen Theile beider Linien oder a d und a e wie d b und e c bestehen jede für sich aus gleich großen Theilen. Daher ist auch

2) $db : ec = ab : ac$.

Zusatz 1. Aus den Proportionen 1 und 2 folgt

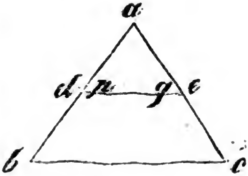
$$ad : ae = db : ec$$

d. h. es verhalten sich auch die oberen Abschnitte zu einander wie die unteren.

Zusatz 2. Wird e f zu a b parallel gezogen, so ist auch $ac : bc = ae : ed$, oder da $bf = ed$ ist, $ac : bc = ae : bf$.

§ 69. Lehrsatz. Wenn in einem Dreieck a b c (Fig. 76.) eine Linie d e parallel mit einer Seite b c gezogen wird, so ist das Dreieck a d e dem Dreieck a b c ähnlich.

Fig. 76.



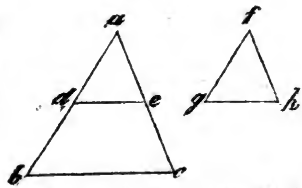
Es ist nämlich nach (§ 66.) darzuthun, daß in beiden Dreiecken die Winkel gegenseitig gleich und die Seiten, durch welche gleiche Winkel eingeschlossen werden, einander proportionirt sind.

Beweis. Erstens sind die Winkel in beiden Dreiecken einzeln genommen einander gleich; denn Winkel a ist sich selbst gleich, ingleichen ist

p = b und q = c als correspondirende Winkel. Was die Seiten betrifft, so ist nach (§ 69.) a d : a e = a b : a c; ferner a d : d e = a b : b c, und a c : c d = a c : b c; folglich sind obige Bedingungen erfüllt und Dreieck a d e $\cong$ a b c.

§ 70. **Lehrsatz.** Dreiecke sind einander ähnlich, wenn die Winkel des einen beziehungsweis gleich sind den Winkeln des anderen.

Fig. 77.



Beweis. Es sei in den beiden Dreiecken (Fig. 77.) Winkel a = f, b = g, c = h; man mache a d = f g, a e = f h und ziehe d e, so ist das Dreieck a d e dem Dreieck f g h gleich und ähnlich; folglich Winkel d = g. Da nun auch b = g ist, so muß d = b sein; daher ist d e parallel mit b c (§ 32.), also Dreieck a d e ∽ a b c. Nun war aber auch Dreieck a d e $\cong$ f g h; folglich ist Dreieck a b c ∽ f g h.

Zusatz. Wenn in zwei Dreiecken zwei Winkel gegenseitig gleich sind, so ist, da dann auch der dritte Winkel gleich ist, die Aehnlichkeit der Dreiecke vollkommen bestimmt.

§ 71. **Lehrsatz.** Wenn in zwei Dreiecken ein Winkel gleich ist, und die diesen Winkel einschließenden Seiten einerlei Verhältniß haben, so sind die Dreiecke einander ähnlich.

Beweis. Es sei in den Dreiecken (Fig. 77.) Winkel a = f, und a b : a c = f g : f h. Man mache nun a d = f g und ziehe d e parallel mit b c, so ist

$$ab : ac = ad : ae$$

und, nach der Annahme, $ab : ac = fg : fh$

folglich $ad : ae = fg : fh$.

Da nun a d = f g, so ist auch a e = f h. Es war aber auch Winkel a = f, folglich ist Dreieck a d e $\cong$ f g h, und da Dreieck a d e ∽ a b c, so ist auch Dreieck a b c ∽ f g h.

§ 72. **Lehrsatz.** Wenn die Seiten zweier Dreiecke einerlei Verhältniß unter einander haben, so sind die Winkel in beiden gegenseitig gleich, folglich die Dreiecke einander ähnlich.

Beweis. In den Dreiecken (Fig. 77.) sei

1) $ab : ac = fg : fh$
2) $ab : bc = fg : gh$

folglich 3) $ac : bc = fh : gh$.

Man mache abermal a d = f g, und ziehe d e parallel mit b c, so ist Dreieck a d e ∽ a b c (§ 69.); dann ist darzuthun, daß a e = f h, und d e = g h ist. Nun ist nach (§ 68.)

$$ab : ac = ad : ae$$

es ist aber aus 1) $ab : ac = fg : fh$

folglich $ad : ae = fg : fh$
nun ist $ad = fg$

daher auch . . . $ae = fh$.

Ferner ist $ab : bc = ad : de$
und aus 2) $ab : bc = fg : gh$

folglich $ad : de = fg : gh$
nun ist aber auch $ad = fg$

daher auch . . . . $de = gh$.

Folglich ist Dreieck $ade \cong fgh$; nun ist aber nach (§ 71.) Dreieck $ade \backsim abc$; daher Dreieck $abc \backsim fgh$.

Zusatz. Wenn in zwei Dreiecken zwei Paare von Seiten beziehungsweis einerlei Verhältniß haben, so ist dadurch auch das gegenseitige Verhältniß des dritten Paares, welches durch obige Proportion 3) angezeigt wird, daher auch die Aehnlichkeit der Dreiecke vollkommen bestimmt.

§ 73. Lehrsatz. Zwei Dreiecke sind einander ähnlich, wenn zwei Seiten in beiden einerlei Verhältniß gegenseitig haben, und der Winkel, welcher der größeren von diesen Seiten gegenüberliegt, in ihnen gleich ist.

Beweis. Es sei in den beiden Dreiecken (Fig. 77.) $ab : ac = fg : fh$, und Winkel $b = g$; aber $ac > ab$, folglich auch $fh > fg$, dann ist auch Winkel b oder g größer als c oder h (§ 34). — Man mache wie oben $ad = fg$ und ziehe de parallel mit bc, so ist Dreieck $ade \backsim abc$. Ferner ist

$ab : ac = ad : ae$
und auch $ab : ac = fg : fh$

also $ad : ae = fg : fh$

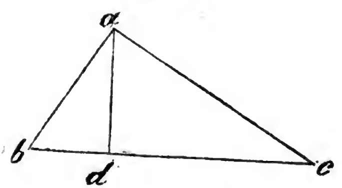
und wegen $ad = fg$ folgt $ae = fh$; da nun auch $ad = fg$ gemacht und Winkel $d = g$, so ist Dreieck $ade \cong fgh$. Nun ist Dreieck $ade \backsim abc$, also ist auch Dreieck $abc \backsim fgh$.

Wäre aber statt des Winkels b der Winkel c gegeben, welcher der kleineren der beiden Seiten ab und fg gegenüberliegt, so würde der Fall in ähnlicher Weise wie oben bei der Congruenz unbestimmt bleiben (vergl. § 40).

Das rechtwinkelige Dreieck.

§ 74. Lehrsatz. Wenn in einem rechtwinkeligen Dreieck abc (Fig. 78.) ein Perpendikel ad aus der Spitze des rechten Winkels bei a auf die Hypotenuse bc gefällt wird, so entstehen zwei Dreiecke, die sowohl unter sich als auch einzeln dem ganzen Dreiecke ähnlich sind.

Fig. 78.



Beweis. Da im ganzen Dreiecke abc bei a, und im Dreiecke abd bei d ein rechter Winkel ist und beide Dreiecke den Winkel b gemeinschaftlich haben, so folgt nach (§ 26.), daß der Winkel bad (im Dreieck abd) gleich ist dem Winkel c (im Dreieck abc); daher ist

1. Dreieck $abc \backsim abd$.

Ferner sind in den Dreiecken a b d, a d c bei d rechte Winkel und aus vorhergehendem b a d = c; folglich auch

II. Dreieck a b d ∽ a d c.

Da nun endlich in den beiden Dreiecken a b c, a d c, Winkel d a c = b und c sich selbst gleich ist, so ergiebt sich weiter

III. Dreieck a b c ∽ a c d.

Zusatz 1. Aus I. folgt 1) b d : a b = a b : b c
und aus II. " 2) d c : a c = a c : b c.

Beide Proportionen lauten wörtlich: Jede Kathete des Dreiecks a b c ist die mittlere Proportionale zwischen dem Abschnitte der Hypotenuse, welcher mit ihr zusammentrifft, und der Hypotenuse selbst.

Zusatz 2. Aus III. leitet man her:

3) b d : a d = a d : d c

d. h. das Perpendikel a d ist die mittlere (geometrische) Proportionale zwischen den beiden Abschnitten der Hypotenuse.

Zusatz 3. Aus den Proportionen 1) und 2) geht hervor:

4) $ab^2 = bd \, . \, bc$
5) $ac^2 = dc \, . \, bc$

also $ab^2 : ac^2 = bd : bc : dc \, . \, bc = bd : dc$

d. h. die Quadrate der beiden Katheten verhalten sich wie die Abschnitte der Hypotenuse.

Zusatz 4. Aus den Gleichungen 4. und 5. ergiebt sich weiter:

$ab^2 + ac^2 = bd \, . \, bc + dc \, . \, bc = (bd + dc) \, . \, bc$

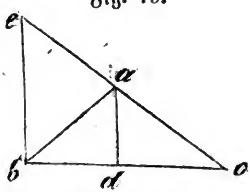
nun ist aber b d + d c = b c, daher

$ab^2 + ac^2 = bc, \, bc = bc^2,$

d. i. die Summe der Quadrate der beiden Katheten ist gleich dem Quadrate der Hypotenuse.

Dieser Satz wird der Pythagoräische Lehrsatz genannt, und vorangehende Herleitung macht den arithmetischen Beweis desselben aus (siehe weiter unten § 96).

Fig. 79.



§ 75. Lehrsatz. Wenn in einem beliebigen Dreieck a b c (Fig. 79.) der Winkel b a c durch a d halbirt wird, so verhalten sich die Abschnitte der Seite b c wie die beiden anderen Seiten d. h. c d : d b = a c : a b.

Beweis. Man verlängere a c nach e hin, mache a e = a b und ziehe b e, so ist Dreieck a b e gleichschenkelig, daher Winkel e b a = e (§ 31). Nun ist Winkel b a c = e b a + e, d. i. Winkel b a c = 2 e b a = 2 e; also ½ b a c = e b a = e. Da aber Winkel b a d = d a c, so ist ½ b a c = b a d = e b a. Beide Winkel sind also Wechselwinkel, folglich die Linien b e, a d einander parallel.

Daher ist a c : c d = a e : b d. Nun ist aber a e = a b
folglich a c : c d = a b : b d
oder durch Versetzung a c : a b = c d : b d.

Anmerk. Es läßt sich auch umgekehrt der Satz darthun: Wenn in einem Dreieck a b c eine Linie a d aus der Spitze des Winkels b a c

nach der gegenüberliegenden Seite bc so gezogen wird, daß die Proportion $cd : db = ac : ab$ stattfindet, so ist der Winkel bac durch ad halbirt.

§ 76. Lehrsatz. Wenn man innerhalb eines Vielecks (Fig. 87, siehe Seite 43.) einen beliebigen Punkt o annimmt, diesen mit den Winkelpunkten a, b, c, d, e durch gerade Linien od, oc, ob u. s. f. verbindet, dann in willkürlicher Entfernung von demselben die Linien lk, ki, kh u. s. w. nach der Ordnung mit dc, cb, ba parallel zieht, so entsteht noch ein zweites gleich vielseitiges Vieleck lkihm, in welchem

1) die Dreiecke denen des äußeren Vielecks einzeln genommen ähnlich sind,

2) in welchem jede zwei Paare der auf einander folgenden Seiten einerlei geometrisches Verhältniß haben, dann

3) die von diesen Seiten eingeschlossenen Winkel einander gleich sind.

Beweis. Wegen der Parallelen lk, dc, dann ki, cb ist

Dreieck olk ∽ odc, ingleichen Dreieck oki ∽ ocb,

daher ist $lk : ko = dc : co$

eben so $ik : ko = bc : co$

folglich $lk : ik = dc : bc$.

Da endlich Winkel $lko = dco$, und Winkel $iko = bco$, so ist auch Winkel $ikl = bcd$.

Was für diese Dreiecke erwiesen ist, läßt sich auch für die übrigen aufstellen, daher gilt der Satz für das ganze Vieleck.

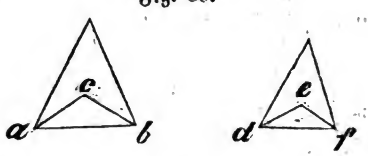
Und was für dieses Fünfeck dargethan ist, dehnt sich auf alle geradlinigen Figuren von einer beliebigen Anzahl von Seiten aus.

Man nennt deshalb auch alle geradlinigen Figuren, bei welchen voranstehende Bedingungen stattfinden, ähnliche Figuren.

Ueberhaupt sind ähnliche geradlinige Figuren solche, welche aus einer gleichen Anzahl von Seiten bestehen, die der Reihe nach einerlei geometrisches Verhältniß zu einander haben, und in welchen die Winkel der einen einzeln und der Reihe nach den Winkeln der anderen gleich sind.

§ 77. Erklärung. Aehnlich liegende (homologe) Seiten in ähnlichen Figuren heißen diejenigen, welche gleichen Winkeln gegenüberliegen; ferner wenn in zwei ähnlichen Figuren, wie in den Dreiecken (Fig. 80.), zwei Punkte c und e so liegen, daß $ac : cb = de : ef$ ist, so heißen auch diese Punkte ähnlich liegende Punkte.

Fig. 80.



§ 78. Aufgaben.

1) Eine gerade Linie ac in eine beliebige Anzahl gleicher Theile z. B. in drei zu theilen (Fig. 74, Seite 36).

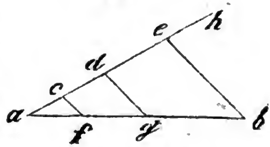
Auflösung. Man lege eine andere gerade Linie ab unter einem beliebigen Winkel an a, mache auf derselben von a aus drei beliebig

große aber gleiche Abschnitte a d, d e, e b. Durch den letzten Theilungspunkt b ziehe man b c; dann ziehe man aus den Punkten e, d die Linien e g, und d f parallel mit b c, so sind a f, f g, g c diese drei gleichen Theile.

Der Beweis ist aus (§ 67.) klar.

2) Eine gerade Linie in drei gleiche Theile zu theilen, welche sich zu einander verhalten wie 1, 2 und 3.

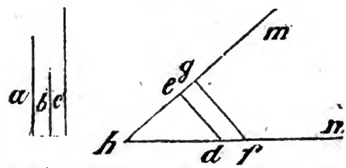
Fig. 81.



Auflösung. Man lege wieder eine Linie a h unter einem beliebigen Winkel an a (Fig. 81.), nehme einen willkürlich großen Theil a c für die Einheit, mache c d zweimal und d e dreimal größer als a c, ziehe e b, dann d g und c f parallel mit e b, so sind a f, f g, g b die verlangten Theile.

Der Beweis erhellet aus (§ 67).

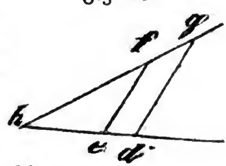
Fig. 82.



3) Zu drei gegebenen Linien a, b, c die vierte Proportionallinie x zu finden (Fig. 82.)

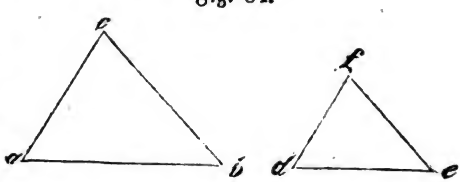
Auflösung. Man lege ein Paar Linien h m und h n unter einem beliebigen Winkel h an einander, und mache h d = a, h e = b und ziehe e d, dann nehme man h f = c und ziehe f g parallel zu e d, so ist h g die verlangte vierte Proportionale; und es ist daher a : b = c : x.

Fig. 83.



Zusatz. Man kann auch die zwei ersteren Linien a und b zusammen auf h n tragen, dann müssen aber die beiden anderen c und x zusammen auf h m, nämlich: man mache in (Fig. 83.) die Linie h d = a, h e = b, dann h g = c und ziehe g d, ferner e f parallel zu d g, so ist h f = x. *)

Fig. 84.



4) Es ist ein Dreieck a b c gegeben; man soll ein anderes ihm ähnliches beschreiben, dessen eine der a b ähnlich liegende Seite (Fig. 84.) gegeben ist.

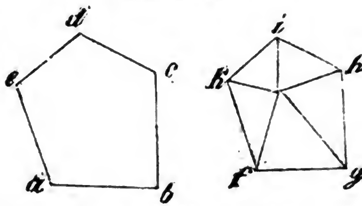
Auflös. Auf der gegebenen Linie d e trage man an d den Winkel a und an e den Winkel b, und verlängere die Schenkel bis sie sich in f schneiden, so ist d e f das verlangte Dreieck.

*) Aus zwei gegebenen Linien die mittlere Proportionale zu finden.

Zusatz 1. Es sind hier alle Seiten und alle Winkel des Dreiecks als gegeben vorausgesetzt; wenn aber nur die Seiten bekannt sind, so suche man etwa zu a b, a c und d e, ingleichen zu a b, b c und f e die vierte Proportionale, und beschreibe mit diesen beiden Proportionalen über d e das Dreieck d e f, so ist dieses das verlangte.

Zusatz 2. Auf ähnliche Art verfährt man, wenn die Aufgabe unbestimmt ist, d. h. wenn sie so lautet: Ein Dreieck zu verzeichnen, welches einem gegebenen ähnlich sei. In diesem Fall kann man zur ähnlich liegenden Seite eine Linie von beliebiger Länge annehmen.

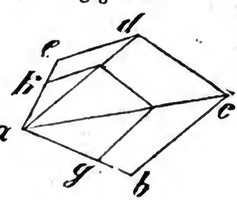
Fig. 85 a, b.



5) Ein Vieleck zu beschreiben, welches einem gegebenen a b c d e ähnlich sei, wenn die mit a b ähnlich liegende Seite des gesuchten Vielecks gegeben ist (Fig. 85).

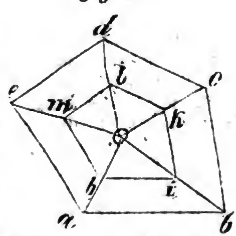
Erste Auflösung. Es sei f g die mit a b ähnlich liegende Seite. Man mache den Winkel g = b, und suche zu a b, b c und g h die vierte Proportionale. Diese ist g h. Dann mache man Winkel h = c, und fahre so fort bis das Viereck vollendet ist.

Fig. 86.



Zweite Auflösung. Es sei das gegebene Vieleck a b c d e und die mit a b ähnlich liegende Seite = f g (Fig. 86.); man theile dasselbe in Diagonalen a d, a c, mache a g = f g (siehe Fig. 85 b), und ziehe g h mit b c, dann h i mit d c, und i k mit d e parallel, so ist a g h i k das verlangte Vieleck.

Fig. 87.



Dritte Auflösung. Es sei das gegebene Vieleck a b c d e (Fig. 87.) und die der a b homologe Seite = f g; (siehe wieder Fig. 85 b), man nehme nun in dem Vieleck einen beliebigen Punkt o an, ziehe o a, o b; dann bringe man nach (Aufg. 6, Seite 25), die Seite f g zwischen die beiden Schenkel o a, o b, so daß sie mit a b parallel läuft, und vollende das Uebrige wie in voriger Auflösung durch Parallelen.

Der Beweis für die beiden letzteren Fälle ergiebt sich daraus, daß wegen der parallelen Seiten die Winkel in beiden Vielecken einander gleich, und die Seiten proportionirt sind. Eben so werden Vielecke aller Art verzeichnet.

Aufgaben verschiedener Art, welchen bisherige Sätze zum Grunde liegen.

6) Eine gegebene gerade Linie in 3 Theile zu theilen, die sich verhalten wie 1, 2 und 3, ohne sie in 6 gleiche Theile zu theilen.

Man theile die Linie in zwei gleiche Hälften, und die eine Hälfte wieder in zwei Theile, die sich verhalten wie 1 zu 2.

7) Ein gleichschenkeliges Dreieck in 4 gleiche und sowohl unter sich als dem ganzen ähnliche Theile zu theilen.

(Fig. 88.) zeigt die Auflösung.

Fig. 88.

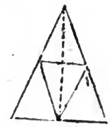
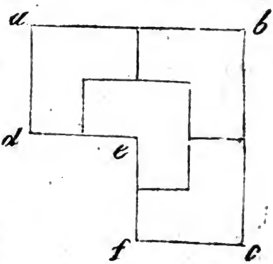


Fig. 89.



8) Eine rechtwinkelige Figur, in welcher a b = b c, a d = d e = e f = f c ist in 4 gleiche und unter sich sowohl als der ganzen Figur ähnliche Figuren zu theilen (Fig. 89).

Die Theilung ist, wie sie die Figur darstellt.

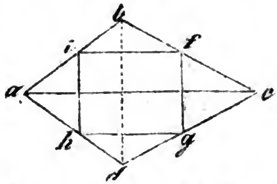
9) Von einem schiefwinkeligen Dreieck durch eine Linie aus einem Winkel ein ihm ähnliches abzuschneiden.

Diese Linie muß man so ziehen, daß sie mit einer Seite des Dreiecks einen Winkel macht, der einem Winkel im Dreieck gleich ist.

10) Ein Dreieck zu beschreiben, das einem gegebenen ähnlich ist, und einen gegebenen Umfang hat.

Man hat zu dem Umfange des gegebenen Dreiecks, zum Umfange des zu beschreibenden und zu der Grundlinie des ersteren die vierte Proportionallinie zu suchen. Diese giebt die Grundlinien des letzteren; der noch übrige Theil des Umfangs desselben ist den beiden anderen Seiten gleich.

Fig. 90.



11) In ein beliebiges Viereck (Fig. 90.) ein Parallelogramm zu beschreiben.

Auflösung. Man halbire jede Seite und ziehe durch die Theilungspunkte je zweier zusammenstoßender Seiten eine gerade Linie, so entsteht ein Parallelogramm i f g h.

Beweis. Man ziehe die Diagonale a c, alsdann ist in dem Dreieck a c d, weil a d und d c halbirt sind, d c : d a = d g : h g folglich h g parallel mit a c.

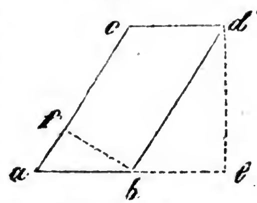
Eben so ist in dem Dreieck a b c, b a : b c = b i : b f, folglich i f parallel mit a c, und daher auch h g = i f.

Auf ähnliche Art läßt sich erweisen, daß, wenn man die Diagonale b d zieht, auch f g und i h mit b d parallel, daher auch f g mit i h parallel ist.

Fünfter Abschnitt.

Von der Ausmessung der Dreiecke und anderer geradlinigen Figuren.

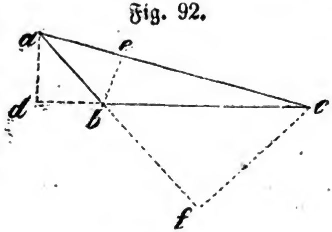
Fig. 91.



§ 79. Erklärung. Wenn in einem Parallelogramm eine beliebige Seite als Grundlinie angenommen wird, so heißt der Abstand derselben von der gegenüberliegenden Seite die Höhe desselben. Nimmt man in dem Parallelogramm a b c d (Fig. 91.) die Linie a b als Grundlinie an, verlängert diese nach e hin, und fällt von d die Senkrechte d e, so ist d e die Höhe des Parallelogramms. Wenn aber a c als Grundlinie betrachtet wird, so ist die Senkrechte b f seine Höhe.

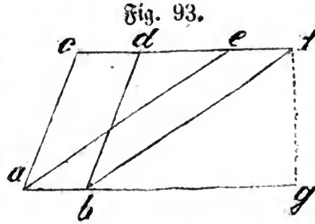
Die Höhe eines Dreiecks ist der senkrechte Abstand zwischen seiner Grundlinie und der der Grundlinie gegenüberliegenden Winkelspitze. — Es kann bei einem Dreieck ebenfalls jede Seite als Grundlinie angenommen werden.

Fig. 92.



Es sei in dem Dreieck a b c (Fig. 92.) a c die Grundlinie, so ist die Senkrechte b e seine Höhe; wird b c als Grundlinie angenommen, so verlängere man c b nach d und fälle a d senkrecht auf c d, so ist jetzt a d die Höhe des Dreiecks; wird a b als Grundlinie angesehen, so ist c f seine Höhe.

Fig. 93.



§ 80. Lehrsatz. Parallelogramme über einerlei Grundlinie und zwischen denselben Parallelen, sind an Flächeninhalt einander gleich.

Beweis. Die beiden Parallelogramme, für welche der Satz zu erweisen ist, sind a b c d und a e b f (Fig. 94). Nun sind die beiden Dreiecke a c e und b d f einander congruent; denn es ist a c = b d,

und a e = b f, dann ist Winkel c a e = d b f als correspondirender, folglich Dreieck a c e ≅ b d f. — Die beiden Parallelogramme haben nun das Dreieck a b h mit einander gemein; eben so ist das Dreieck d e h beiden gemeinschaftlich. — Denkt man sich nun das Dreieck d e h herausgenommen, so bleibt

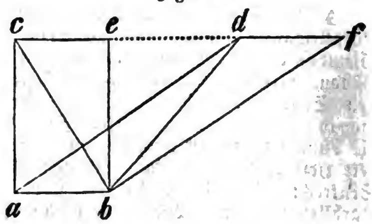
Trapez a c d h = Trapez b f e h.

Da nun das Dreieck a b h beide Trapeze zu Parallelogrammen ergänzt, so ist

Parallelogramm a b c d = Parallelogramm a b e f.

Zusatz 1. Das Parallelogramm a b e f mag auch noch so schief sein, so bleibt es immer gleich a b c d; daher der allgemeine Satz: Parallelogramme von gleicher Grundlinie und gleicher Höhe sind einander gleich.

Fig. 94.



§ 81. Dreiecke von einerlei Grundlinie und zwischen denselben Parallelen sind einander gleich.

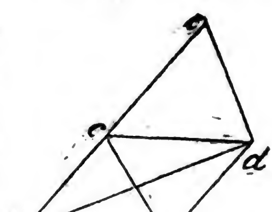
Beweis. Es mögen a b c und a b d zwei solcher Dreiecke sein (Fig. 94). Aus b ziehe man b e mit a c und auch b f mit a d parallel, so ist a b c e = a b d f (§ 80.) Es ist aber Dreieck a b c = ½ a b c e, und Dreieck a b d = ½ a b d f. Da nun auch ½ a b c e = ½ a b d f, so ist auch Dreieck a b c = Dreieck a b d, d. h. wenn die ganzen Parallelogramme einander gleich sind, so müssen auch ihre Hälften einander, folglich auch die Dreiecke, welche diese Hälften ausmachen, einander gleich sein.

Zusatz 1. Dreiecke von gleicher Grundlinie und gleicher Höhe sind einander gleich.

Zusatz 2. Ein Dreieck ist halb so groß als ein Parallelogramm, welches mit ihm gleiche Grundlinie und gleiche Höhe hat.

Zusatz 3. Wenn zwei congruente Dreiecke so an einander gelegt werden, daß sie zusammen ein Parallelogramm bilden, so kann dieß auf dreierlei Art geschehen, je nachdem man das eine, das andere oder das dritte Paar der gleichen Seiten an einander legt. Diese drei Parallelogramme sind dann einander gleich an Inhalt; aber nicht an Gestalt, wenn die 3 Seiten ungleich sind.

Fig. 95.



§ 82. Lehrsatz. Unter allen Dreiecken von gleicher Grundlinie und gleicher Höhe hat das gleichschenkelige den kleinsten Umfang.

Beweis. Zwischen den Parallelen a b, c d sei das gleichschenkelige Dreieck a b c und noch ein zweites a b d errichtet (Fig. 95.) Man verlängere a c so, daß c e = b c = a c werde, und ziehe d e, so ist in den Dreiecken c d e und c b d, die Seite c e = c b und c d = c d als

zu beiden Dreiecken gehörend. Ferner ist, da Winkel e c d = c a b und d c b = c b a ist, Winkel e c d = d c b, folglich beide Dreiecke einander congruent, daher auch e d = b d, also a d + b d = a d + d e.

Es ist aber a d + d e > a e (§ 36.), folglich auch, da a e = a c + b c ist, a d + d e > a c + b c.

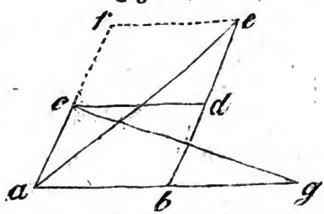
Anmerk. Da die Grundlinie a b beiden Dreiecken gemeinschaftlich ist, so braucht sie bei dem Umfange beider Dreiecke nicht mit in Betracht zu kommen.

§ 83. Aufgaben.

1) Ein Dreieck in eine beliebige Anzahl gleicher Theile zu theilen.

Auflösung. Man theile die Grundlinie in eben so viel gleiche Theile, als man gleiche Dreiecke haben will; dann ziehe man von der gegenüberliegenden Winkelspitze gerade Linien bis auf die Theilungspunkte der Grundlinie, so sind alle dadurch entstandenen Dreiecke einander gleich (§ 81. Zus. 1).

Fig. 96.



2) Ein Dreieck zu verzeichnen, das einem gegebenen Parallelogramm gleich sei.

Auflösung. Es sei a b c d das gegebene Parallelogramm (Fig. 96.) Man verlängere eine Seite desselben z. B. b d so, daß d e = b d werde und ziehe a e, so ist a b e das verlangte Dreieck.

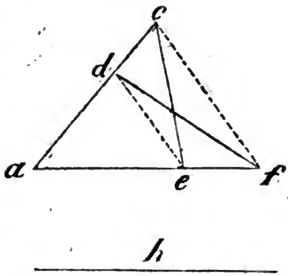
Beweis. Man denke sich a c bis f verlängert und e f parallel zu a b gezogen, so ist a b e f ein Parallelogramm, welches noch einmal so groß ist als a b c d, und durch die Diagonale a e in zwei congruente Dreiecke getheilt wird, folglich ist Dreieck a e b, als die Hälfte des Parallelogramms a b e f, gleich dem Parallelogramm a b c d.

Zusatz 1. Statt der Seite a c kann man eben sowohl die Seite a b verlängern, und b g gleich a b machen, dann c g ziehen, wodurch das Dreieck a c g entsteht, welches eben sowohl dem Parallelogramm a b c d gleich ist.

Zusatz 2. Ein Dreieck ist einem Parallelogramm gleich, welches mit ihm gleiche Grundlinie aber eine doppelt so große Höhe, oder mit ihm eine gleiche Höhe aber eine doppelt so große Grundlinie hat.

Zusatz 3. Aus vorhergehendem Zusatz ergiebt sich, wie ein Parallelogramm zu verfertigen ist, welches einem gegebenen Dreiecke gleich sei.

Fig. 97.



3) Ein Dreieck in ein anderes von einer gegebenen Grundlinie zu verwandeln.

Auflös. Es sei a e c das gegebene Dreieck (Fig. 97.), und h die Grundlinie, die es erhalten soll, so ist einleuchtend, daß auch die Höhe eine andere werden müsse.

Man nehme eine beliebige Seite des Dreiecks als Grundlinie z. B. a e, verlängere dieselbe so, daß a f = h werde; von ihrem Endpunkte f ziehe man f c, dann d e mit f c parallel und ziehe d f, so ist a d f das neue Dreieck.

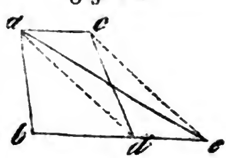
Beweis. Da d e parallel mit c f ist, so haben die beiden Dreiecke d e c und d e f einerlei Grundlinie d e und gleiche Höhe (§ 81.), folglich sind sie einander gleich.

4) Ein gegebenes Dreieck in ein anderes von einer gegebenen Höhe k zu verwandeln.

Auflös. Es sei wiederum a c e (Fig. 97.) das gegebene Dreieck.

Man nehme eine beliebige Seite z. B. a e als Grundlinie an, und errichte aus einem beliebigen Punkte derselben die gegebene Höhe k senkrecht, und ziehe durch ihren Endpunkt eine Parallele mit a e, und verlängere a c bis an dieselbe. Aus dem Punkte, wo die Parallele von dieser verlängerten getroffen wird, ziehe man eine Linie nach e und eine ihr von c nach a e Parallele, dann wird sich das Uebrige nach vorhergehender Aufgabe von selbst ergeben.

Fig. 98.

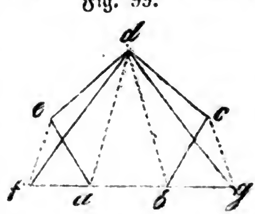


5) Ein beliebiges Viereck a b c d in ein Dreieck zu verwandeln (Fig. 98).

Auflös. Man ziehe eine Diagonale a d und durch c eine Parallele c e mit a d; man verlängere b d bis e, wo sie die Paralle trifft, und aus e ziehe man e a, so ist a b e das verlangte Dreieck. Der Beweis wird aus der vorletzten Auflösung klar.

Anmerk. Diese Verwandlung kann auf verschiedene Art bewerkstelligt werden, indem man eine Parallele durch b mit a d legt, dann entweder c d oder a c bis an dieselbe verlängert, je nachdem es die Figur in dem einen oder in dem anderen Falle, oder in beiden Fällen zugleich gestattet.

Fig. 99.



6) Ein beliebiges Fünfeck a b c d e in ein Dreieck zu verwandeln (Fig. 99.)

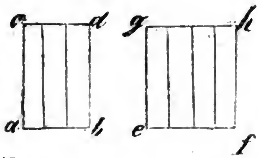
Auflösung. Man ziehe Diagonalen a d, b d, dann e f mit a d, und c g mit b d parallel, ziehe ferner a f und b g, so ist d f g das verlangte Dreieck.

Der Beweis erhellet aus der Auflösung der Aufgabe 3.

Auf diese Art läßt sich jedes Vieleck nach und nach auf ein Dreieck zurückbringen.

§ 84. **Lehrsatz.** Parallelogramme von gleicher Höhe verhalten sich wie ihre Grundlinie.

Fig. 100.



Beweis. Die beiden Parallelogramme von gleicher Höhe mögen abcd und efgh sein (Fig. 100.) Man theile beide Grundlinien in eine beliebige Anzahl gleicher Theile, etwa ab in 3 und ef in 4 solcher Theile, und bezeichne einen solchen Theil mit m, so ist

$$ab = 3m$$
$$ef = 4m$$

$$\text{also } ab : ef = 3m : 4m$$
$$\text{daher } ab : ef = 3 : 4.$$

Ferner ziehe man durch die Theilungspunkte der Grundlinien Parallelen mit den Seiten der Parallelogramme, so entstehen in jedem Parallelogramm so viel kleine Parallelogramme als die Grundlinie Theile = m enthält; und alle diese Parallelogramme sind einander gleich, weil sie alle gleiche Grundlinie und gleiche Höhe haben.

Bezeichnet man den Flächeninhalt eines solchen Parallelogramms mit n, so ist

$$abcd = 3n$$
$$\text{ingleichen } efgh = 4n$$

$$\text{folglich } abcd : efgh = 3n : 4n$$

$$\text{daher } abcd : efgh = 3 : 4; \text{ nun ist}$$
$$\text{aber auch } ab : ef = 3 : 4$$

$$\text{folglich } abcd : efgh = ab : ef.$$

Die Proportion bleibt demnach immer die nämliche, die Grundlinien mögen auch in noch so viel (gleiche) Theile getheilt sein.

Zusatz 1. Auch Dreiecke, als die Hälften von Parallelogrammen verhalten sich bei gleicher Höhe wie die Grundlinien.

Zusatz 2. Parallelogramme von gleicher Grundlinie verhalten sich wie ihre Höhen; denn man darf nur (in derselben Figur) die Grundlinie mit der Höhe verwechseln.

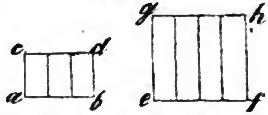
Zusatz 3. Auch Dreiecke von gleicher Grundlinie verhalten sich wie ihre Höhen.

§ 85. **Lehrsatz.** Parallelogramme von ungleicher Grundlinie und ungleicher Höhe sind in zusammengesetztem Verhältniß ihrer Grundlinien und Höhen, d. h. sie verhalten sich wie die Grundlinien, multiplicirt mit den Höhen.

Beweis. Wenn die beiden Parallelogramme die Figuren 101. vorstellen, so theile man wieder ihre Grundlinien ab in 3 und ef in 4 gleiche Theile, so ist

$$ab : ef = 3 : 4.$$

Fig. 101.



Ferner ziehe man ebenfalls durch jeden Theilungspunkt der Grundlinien Parallellinien mit den Seiten desselben Parallelogramms, so erhält man lauter kleine Parallelogramme von gleicher Grundlinie. Von diesen sind sowohl diejenigen, die in a b c d, als auch diejenigen, die in e f g h eingeschlossen sind, jede unter sich von gleicher Grundlinie und gleicher Höhe.

Man bezeichne eines derselben von a b c d mit m und eines von e f g h mit n,

so ist a b c d = 3 m
und e f g h = 4 n

Da die kleinen Parallelogramme einerlei Grundlinien haben, so verhalten sie sich wie ihre Höhen. Wenn nun g die Höhe von a b c d und h die Höhe von e f g h bedeutet, so ist

m : n = g : h
folglich 3 m : 4 n = 3 g : 4 h
d. i. a b c d : e f g h = 3 g : 4 h.

Da nun 3 : 4 das Verhältniß der Grundlinie und g : h das Verhältniß der Höhen ausdrückt, so verhalten sich die Parallelogramme wie die Producte der Grundlinien und Höhen.

Es sei z. B. von zwei Parallelogrammen die Grundlinie des einen 5 Fuß und seine Höhe 8 Fuß; die Grundlinie des anderen 6 Fuß und seine Höhe 9 Fuß; alsdann verhält sich das erstere Parallelogramm zum anderen wie 5 . 8 zu 6 . 9, d. i. wie 40 zu 54, oder wie 20 zu 27.

Das letztere ist also $1\frac{7}{20}$mal so groß als das erstere.

Berechnung der Figuren.

§ 86. Erläuterung. Um eine Fläche auszumessen, muß man eine andere Fläche als Maßstab haben. Man hat daher das Quadrat zum allgemeinen Flächenmaß gewählt, und zwar nennt man es eine Quadratruthe, einen Quadratfuß u. s. w., je nachdem seine Seite eine Ruthe, ein Fuß u. s. w. ist

Das Flächenmaß heißt auch Quadratmaß und das letztere, mit welchem die Seiten einer Figur oder die Linien gemessen werden, Längenmaß.

§ 87. Aufgabe. Ein Parallelogramm auszumessen.

Auflösung. Man messe die Grundlinie sowohl als die Höhe des Parallelogramms mit einerlei Längenmaß, d. h. mit einer Ruthe oder mit einem Fuß u. s. w., oder was man überhaupt als Maßstab nehmen will, und multiplicire beide zusammen, so giebt das Product den Flächen- oder Quadratinhalt des Parallelogramms, welcher in der Summe der Quadrate des angenommenen Maßstabes besteht.

Beweis. Es sei die Seite des Quadrats, welches zum Maßstabe des Parallelogramms dienen soll, und mit welcher als Längenmaßstabe die Grundlinie und Höhe des letzten zu messen sind, = a, also das Quadrat = a^2, welches wir mit p bezeichnen wollen. Ferner sei die Grundlinie des Parallelogramms = g und seine Höhe = h, so ist, wenn P das Parallelogramm darstellt,

$$P = g\,h$$
$$\text{und } p = a^2$$

$$\text{also } p : P = a^2 : g\,h.$$

Es sei nun $g = m \,.\, a$ und $h = n \,.\, a$ so ist

$$g\,h = m\,a \,.\, n\,a = a^2\,m\,n$$
$$\text{also } p : P = a^2 : a^2\,m\,n,$$
$$\text{daher } p : P = 1 : m\,n,$$

d. h. es verhält sich das zum Maßstabe angenommene Quadrat zum ausgemessenen Parallelogramm, wie die Einheit zum Product der beiden Zahlen m und n.

Zusatz 1. Da dieses Quadrat sich in der Einheit darstellt, und seine Grundlinie der Höhe gleich ist, so ist es $= 1 \,.\, 1$, und obige Proportion muß eigentlich so ausgedrückt sein:

$$p : P = 1 \,.\, 1 : m\,n,$$

m zeigt also die Anzahl der Einheiten des Maßstabes an, aus welchen die Grundlinie, und n die Anzahl der Einheiten desselben Maßstabes, aus welche die Höhe des Parallelogramms besteht, und m n die Anzahl der Einheiten in Quadraten, welche das Parallelogramm enthält.

Zusatz 2. Man braucht also nur den Maßstab, sei es eine Ruthe, ein Fuß u. s. w. für die Einheit anzunehmen, und die Anzahl der Einheiten, welche die Grundlinie enthält, mit der Anzahl derselben Einheiten, aus welcher die Höhe besteht, mit einander zu multipliciren; das Product giebt die Anzahl der gleichnamigen Einheiten in Quadratmaß an, d. h. wenn die Grundlinie und Höhe eines Parallelogramms nach Ruthen gemessen worden ist, so besteht auch der Flächeninhalt desselben aus Quadratruthen.

Es sei z. B. die Grundlinie eines Parallelogramms 8 Fuß und seine Höhe 9 Fuß, so ist sein Flächeninhalt $= 8 \,.\, 9 = 72$ Quadratfuß.

Zusatz 3. Bei dieser Art von Ausmessung ist es nothwendig, die Grundlinie und Höhe eines Parallelogramms mit einerlei Längenmaß zu messen. Wenn z. B. die Grundlinie nach Fußen und die Höhe nach Zollen bestimmt wäre, so müßte beides auf einerlei Benennung gebracht werden. Dieß gilt überhaupt von jeder auszumessenden Figur.

Zusatz 4. Wenn das auszumessende Parallelogramm selbst wieder ein Quadrat ist, so braucht man nur eine Seite desselben mit dem Längenmaß auszumessen, die dadurch gefundene Zahl mit sich selbst zu multipliciren, und das Product in Quadraten des Längenmaßes auszudrücken. Ist z. B. eine Seite 8 Fuß, so ist das ganze Quadrat $= 64$ Quadratfuß. Denn es ist hier die Grundlinie der Höhe gleich.

Anmerk. Man hüte sich, das Product einer Linie mit einer Zahl für Quadratmaß zu nehmen. Wenn z. B. eine Linie von 8 Fuß Länge mit 8 multiplicirt wird, so ist das Product $= 8 \,.\, 8$ Fuß $= 64$ Fuß Länge, aber nicht 64 Quadratfuß. Denn 8 Fuß soll 8 mal vergrößert werden, folglich bleibt die Größe eine Länge. Wenn aber 8 auch eine Linie vorstellt, dann ist das Product $64 = 64$ Quadratfuß.

Zusatz 5. Da ein Dreieck die Hälfte eines Parallelogramms von gleicher Grundlinie und Höhe ist (§ 81, Zus. 2.), so findet man seinen Flächeninhalt, wenn man seine Grundlinie und Höhe mit einander multiplicirt und das Product durch 2 dividirt oder, was dasselbe ist, wenn

man die Grundlinie mit der halben Höhe, oder die halbe Grundlinie mit der ganzen Höhe multiplicirt.

Z. B. es sei die Grundlinie eines Dreiecks = 6 Fuß und seine Höhe 8 Fuß, so ist sein Quadratinhalt $= \frac{6.8}{2} = 24$ Quadratfuß.

Zusatz 6. Parallelogramme so auch Dreiecke, deren Grundlinie, mit ihrer Höhe multiplicirt, gleiche Producte geben, sind einander gleich.

Es sei z. B. die Grundlinie des einen Parallelogramms 12 Fuß, seine Höhe 8 Fuß; die Grundlinie eines anderen 16 Fuß und seine Höhe 6 Fuß, so ist der Flächeninhalt des ersteren = 8 . 12 = 96 Quadratfuß, und der des anderen 16 . 6 = 96 Quadratfuß.

Eintheilung der Maße.

§ 88. Man theilt das Maß in Decimalmaß und in Duodecimalmaß ein. Das Decimalmaß wird gewöhnlich zu den geometrischen Vermessungen angenommen, daher heißt es auch geometrisches Maß, und wird in Ruthen, Fußen und Zollen ausgedrückt.

Die Ruthe desselben enthält 10 Fuß, der Fuß 10 Zoll, der Zoll 10 Linien, welches Längenmaß ist; und die Quadratruthe dieses Maßes enthält 10 . 10 = 100 Quadratfuß, der Quadratfuß 100 Quadratzoll, der Quadratzoll 100 Quadratlinien.

Die Ruthe des Duodecimalmaßes enthält 12 Fuß, der Fuß 12 Zoll, der Zoll 12 Linien; und die Quadratruthe 12 . 12 = 144 Quadratfuß, der Quadratfuß 144 Quadratzoll, der Quadratzoll 144 Quadratlinien.

Man hat für Ruthen, Füße, Zölle, Linien besondere Zeichen, nämlich: ° ′ ″ ‴. Z. B. 6° 4′ 3″ 8‴ heißt: 6 Ruthen 4 Fuß 3 Zoll 8 Linien; und Quadratruthe, Quadratfuß u. s. w. wird durch □° □′ □″ □‴ bezeichnet.

§ 89. Aufgaben.

1) Die Grundlinie eines Parallelogramms sei = 5′ 6″ 8‴ und seine Höhe 3′ 4″ 6‴ in Duodecimalmaß; wie viel beträgt sein Quadratinhalt?

Es ist 5′ 6″ 8‴ = 800‴
3′ 4″ 6‴ = 486‴
388800 □‴.

Um diese Quadratlinien in Quadratzollen und Quadratfußen auszudrücken, hat man zweimal mit 144 zu dividiren. Es ist also

$$\frac{388800 \,\square'''}{144} = 2700 \,\square'';$$

ferner $\frac{2700 \,\square''}{144} = 18 \,\square' \; 108 \,\square''$, welches der Quadratinhalt des Parallelogramms ist.

2) Ein Tisch ist 5½ Fuß lang und 3⅓ Fuß breit; welches ist sein Quadratinhalt? 18⅓ □′ = 18 □′ 48 □″ (Duodecimalmaß).

Hier ist nämlich nur die Oberfläche zu betrachten und die Dicke außer Acht zu lassen.

3) Ein Saal ist 2° 8′ 5″ lang und 2° 1′ 7″ breit (Decimalmaß); welches ist sein Quadratinhalt?

Das geometrische Maß gewährt den Vortheil in der Rechnung, daß man nicht wie bei dem Duodecimalmaß erst nöthig hat, die Ruthen zu Fußen u. s. w. zu machen.

Denn es ist an und für sich schon 2° 8′ 5″ = 285″
und 2° 1′ 7″ = 217″
also 285″ × 217″ = 61845 □″.

Macht man diese Quadratzolle zu Quadratfußen und Quadratruthen durch Division mit 100, so erhält man

6 □° 18 □′ 45 □″

also dieselben Ziffern aus welchen die Quadratzolle bestehen; daher ist es auch hier nicht nöthig, durch 100 zu dividiren; sondern man braucht blos von der Rechten nach der Linken je 2 Ziffern zu bemerken, welche dann jedesmal zu derselben Abtheilung des Maßes gehören.

4) Die Grundlinie eines Dreiecks sei 2″ 3‴, 5 und seine Höhe 6″ 4‴, 2 (Duodecimalmaß); wie groß ist sein Flächeninhalt?

7 □″, 31 = 7 □″ 44 □‴, 64.

5) Der Flächeninhalt eines Rechtecks sei 6 □′ 8 □″ 8 □‴, und die eine Seite 3′ 8‴ (Decimalmaß), wie groß ist die andere Seite?

Es ist 6 □′ 8 □″ 8 □‴ = 6 | 08 | 08 □‴ und 3′ 8‴ = 308‴

also $\frac{60808 \, □'''}{308'''}$ = 197‴, 4 = 1′ 9″ 7‴, 4.

Anmerk. Wenn bei dem Decimalquadratmaß die kleineren Eintheilungen in Einern gegeben sind, wie bei diesem Beispiel, so muß für die Rechnung noch eine Null zur Linken beigefügt werden.

Man überzeugt sich, wenn man den Quadratfuß, Zoll u. s. w. durch Multiplication mit 100 in die kleinere Eintheilung verwandelt.

6) Der Flächeninhalt eines Dreiecks sei 1 □′ 11 □″, 3 und seine Höhe 8″; wie groß ist seine Grundlinie? 5″, 825.

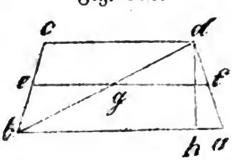
7) Der Flächeninhalt eines Quadrats sei 1 □′ 5 □″ 6 □‴, (Decimalmaß); wie groß ist eine Seite desselben? 1′ 2‴, 5.

8) Ein Rechteck sei 8′ lang und 6′ breit; ein Quadrat habe mit diesem gleichen Umfang, nämlich = 28′; wie verhält sich der Inhalt des Rechtecks zu dem des Quadrats? Wie 48 : 49.

9) Der Quadratinhalt eines Streifens sei = 6 □Zoll, und seine Breite ½ Linie (Decimalmaß); wie viel beträgt seine Länge? 12 Fuß.

10) Der Flächeninhalt eines Quadrats sei = 8 □′ 108¼ □″ (Duodecimalmaß); wie groß ist eine Seite desselben? 2′ 11½″.

Fig. 102.



§ 90. Aufgabe. Ein Trapezium a b c d (Fig. 102.) auszumessen.

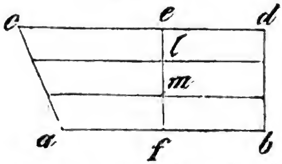
Auflös. Man addire die beiden parallelen Seiten und multiplicire ihre Summe mit der Hälfte des Perpendikels zwischen ihnen.

Beweis. Man ziehe die Diagonale b d und das Perpendikel d h

so ist Dreieck b c d = ½ c d.d h
und Dreieck a b c = ½ a b.d h, weil die Höhe d h beiden gemeinschaftlich ist,
daher Trap. a b c d = Dreieck b c d + Dreieck a b d = ½ c d.d h + ½ a b.d h = ½ d e (c d + a b),
man addire also die beiden parallelen Seiten und multiplicire ihre Summe mit der Hälfte ihres Abstandes von einander.

Zusatz 1. Ein Trapezium kann in zwei gleiche Theile getheilt werden, wenn man jede der parallelen Seiten halbirt, und durch die Theilungspunkte e, f eine gerade Linie e f zieht (Fig. 103.)

Fig. 103.



Auf ähnliche Weise kann es auch in drei und mehrere gleiche Theile getheilt werden.

Zusatz 2. Liegen innerhalb des Trapeziums noch Parallelen mit a b und c d, so werden diese ebenfalls durch e f halbirt, z. B. g h durch l und i k durch m.

§ 91. Lehrsatz. Wenn eine gerade Linie e f in einem Trapez a b c d mitten zwischen den parallelen Seiten desselben liegt und ihnen parallel gezogen ist, so ist diese Linie die mittlere arithmetische Proportionale zwischen den beiden Parallelen-Seiten, d. h. sie ist der halben Summe derselben gleich (Fig. 102.)

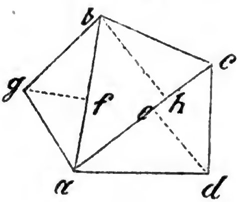
Beweis. Man ziehe die Diagonale b d, so ist d f : f g = d a : a b und da d f = ½ d a, so ist auch f g = ½ a b. Eben so ergiebt sich, daß e g = ½ c d ist; folglich ist f g + g e = ½ (c d + a b), d. i. e f = ½ (c d + a b).

§ 92. Aufgabe. Ein jedes Vieleck auszumessen.

Auflös. Man zertheile das Vieleck durch Diagonalen in Dreiecke, suche den Inhalt eines jeden derselben und addire diesen von allen Dreiecken zusammen, so giebt die Summe den Inhalt des Vielecks.

Die Zerlegung des Vielecks in Dreiecke kann auf mancherlei Art bewerkstelligt werden.

Fig. 104.



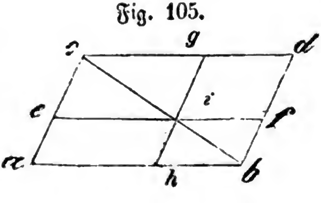
Es stelle z. B. (Fig. 104.) eine Wiese vor, und man habe durch Messung gefunden, daß a b = 19° 8′, f g = 6° 8′, a c = 21° 4′, h b = 7° 3′ und e d = 5° 8′, so ist der Flächeninhalt der ganzen Wiese

$$= \frac{198.68 + 214.73 + 214.58}{2}$$

= 207 □° 49 □′.

§ 93. Lehrsatz. Wenn man durch einen beliebigen Punkt i in der Diagonale b c eines Parallelogramms (Fig. 105.) zwei gerade Linien e f, g h mit den Seiten desselben parallel zieht, so sind die beiden Parallelogramme a h e i und i f g d, durch welche die Diagonale nicht geht, einander gleich.

Fig. 105.



Beweis. Man bezeichne Dreieck e c i mit m, c i g mit n, h i b mit q, b i f mit r; Parallelogramm a h e i mit o, i f g d mit p;

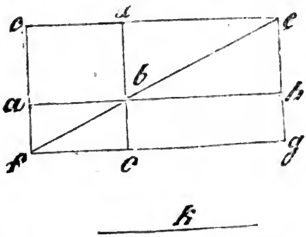
also ist Dreieck a b c = m + o + q
und Dreieck b c d = n + p + r
da nun Dreieck a b c = b c d ist,
so ist m + o + q = n + p + r
nun ist aber m = n und q = r
folglich o = p.

Zusatz 1. Die Parallelogramme, durch welche die Diagonale geht, sind einander ähnlich: dann die Dreiecke in dem einen sind den Dreiecken in dem andern ähnlich, welche durch die Diagonale entstanden sind; folglich sind auch die Parallelogramme, die aus zwei solchen Dreiecken zusammengesetzt sind, einander ähnlich.

Zusatz 2. Es ist aus Vorhergehendem f i : h i = i e : e c, daher auch, weil i g = e c ist, f i : h i = e i : i g, folglich f i . i g = h i . e i, d. h. in den gleichen Parallelogrammen a h e i und i f g d sind die Producte zweier anstoßenden Seiten einander gleich.

§ 94. Aufgabe. Es sei ein Parallelogramm gegeben; man soll dasselbe in ein anderes von einer gegebenen Seite verwandeln.

Fig. 106.



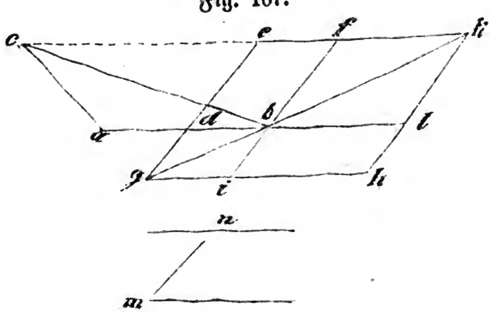
Auflös. Es sei (Fig. 106.) a b c d das gegebene Parallelogramm und k die gegebene Seite des neuen Parallelogramms.

Man verlängere genugsam c d und a b nach e und h, dann c a und d b nach f und i hin. Man mache d e = k, und ziehe aus e durch b die Gerade e f, dann f g mit a h und e g mit d i parallel, so ist b h i g das verlangte Parallelogramm, welches = a b c d ist, und b h = k = der gegebenen Seite.

Der Beweis gründet sich auf vorhergehendem Satz.

§ 95. Es sei ein Dreieck gegeben; man soll dasselbe in ein Parallelogramm von einer gegebenen Seite und einem gegebenen Winkel verwandeln.

Fig. 107.

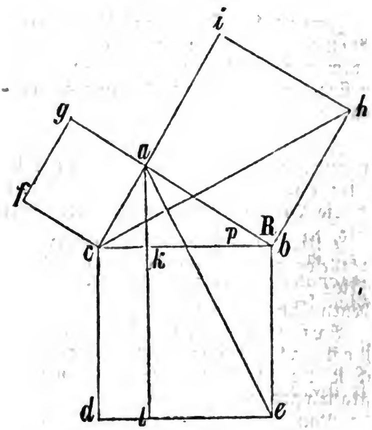


Auflös. Es sei das Dreieck a b c, die Seite n und der Winkel m gegeben (Fig. 107).

Man mache zuerst das Parallelogramm d e f b (§ 94.) und den Winkel e d b dem gegebenen m gleich; dann hat man nur noch nach der Vorschrift der vorhergehenden Auflösung dieses Parallelogramm in ein anderes von der gegebenen Seite n zu verwandeln.

Es ist also Parallelogramm b i h l = d b e f = Dreieck a b c und auch Winkel b i h = f b l, und b l gleich der gegebenen Seite.

Fig. 108.



§ 96. Lehrsatz. In einem jeden rechtwinkeligen Dreieck a b c ist das Quadrat der Hypotenuse, b c d e, so groß als die Quadrate der beiden Katheten a b h i und a c f g zusammengenommen (Fig. 108.)

Beweis. Man fälle aus der Spitze des rechten Winkels a ein Perpendikel a k auf die Hypotenuse und verlängere dasselbe bis l. Dadurch wird das Quadrat in zwei Rechtecke c d l k und k l e b getheilt, von denen jedes demjenigen Quadrate gleich ist, das mit ihm zusammen stößt, nämlich: c d l k = a c f g, und b e k l = a b h i.

Um zu beweisen, daß b e l k = a b h i ist, ziehe man die geraden Linien a e und c h, wodurch man zwei Dreiecke b c h und a b e erhält, die einander gleich sind.

Es ist nämlich a b = b h, ingleichen b e = b c als Seiten eines Quadrats, und der Winkel a b e = h b c, weil beide = R + p sind, das heißt: b h im Dreieck b h c ist = a b im Dreieck a b e, dann b c im Dreieck b c h ist = b e im Dreieck a b e. Da nun in beiden Dreiecken zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel R + p gleich sind, so sind beide Dreiecke einander congruent, also

Dreieck b c h = a b e.

Es ist ferner das Dreieck a b e = ½ b k l e, weil sie einerlei Grundlinie b e und einerlei Höhe b k haben, denn sie sind zwischen denselben Parallelen b e und a b (Fig. 81.); und das Dreieck b h c = ½ a b h i, weil sie ebenfalls einerlei Grundlinie b h und einerlei Höhe a b haben. Da nun die Dreiecke a b e und h b c einander gleich sind, so ist auch ½ b k l e = ½ a b h i. Da nun die Hälften einander gleich sind, so sind es auch die Ganzen; folglich ist

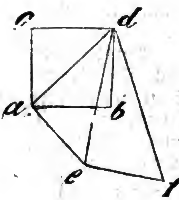
b k l e = a b h i.

Zieht man auf der andern Seite eine Linie von a nach d, und eine von b nach f, so läßt sich auf ähnliche Art zeigen, daß c d k l = a c f g ist.

Die beiden Rechtecke b k l e und c k l d aber machen das Quadrat der Hypotenuse aus; folglich ist dieses Quadrat den Quadraten der beiden Katheten a b h i und a c f g zusammengenommen gleich.

Dieser Satz wird von seinem Erfinder, dem griechischen Philosophen Pythagoras, der gegen 500 Jahre vor Christi Geburt gelebt hat, der **Pythagoräische Lehrsatz** und wegen seiner richtigen Anwendung der **Magister matheseos** genannt (vergl. § 74, Zusatz 4).

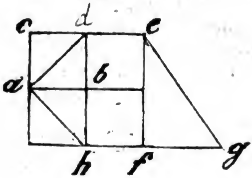
Fig. 109.



Zusatz 1. Sind beide Katheten einander gleich, so ist das rechtwinkelige Dreieck gleichschenkelig und macht die Hälfte eines Quadrats aus, dessen Seite eine Kathete und dessen Diagonale die Hypotenuse dieses Dreiecks ist.

Die Diagonale eines Quadrats ist daher die Seite eines noch einmal so großen Quadrats.

Fig. 110.



Zusatz 2. Die Seite eines Quadrats, das dreimal so groß als ein gegebenes ist, wird gefunden, wenn man die Diagonale und eine Seite des gegebenen rechtwinkelig an einander setzt.

Es sei **a b c d** das gegebene Quadrat, und **a d** die Diagonale (Fig. 109.); man setze **a e = a b** rechtwinkelig an **a d**, so daß Winkel **d a e = R** werde und ziehe **d e**, so ist **d e** die Seite eines dreimal größern Quadrats als **a b c d**.

Setzt man ferner **a b** mit **d e** in **e** rechtwinkelig zusammen, so daß **e f = a b** werde und zieht **d f**, so ist **d f** die Seite eines viermal größeren Quadrats als **a b d c**.

Zusatz 3. **d f** als die Seite des vierfachen Quadrats ist noch einmal so groß als die Seite **a b** des einfachen.

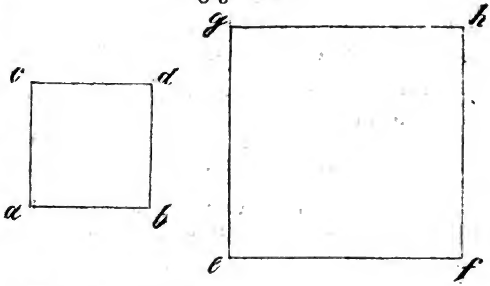
Zusatz 4. Wäre **e f** gleich der Diagonale **a d** gemacht, so wäre **d f** die Seite des fünffachen Quadrats von **a b c d**.

Zusatz 5. Die Seite des fünffachen Quadrats läßt sich auch finden, wenn man mit der Seite des vierfachen die des einfachen, **a b**, rechtwinkelig zusammensetzt und die Diagonale zieht, welche dann die verlangte Seite ist. In Fig. 110. stellt **c g** die Seite des fünffachen Quadrats vor.

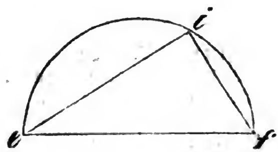
Zusatz 6. Die Seite eines Quadrats, das so groß ist als mehrere verschiedene Quadrate zusammen genommen, wird gefunden, wenn man die Seite des ersten und des zweiten Quadrats rechtwinkelig an einander setzt und wie in vorhergehenden Sätzen die Hypotenuse zieht; an diese die Seite des dritten Quadrats rechtwinkelig setzt und wieder die Hypotenuse zieht; an diese die Seite des vierten Quadrats rechtwinkelig setzt u. s. f.

§ 97. Aufgabe. Die Seite eines Quadrats zu finden, welches dem Unterschiede zweier gegebenen Quadrate gleich ist.

Fig. 111.



Aufl. Man beschreibe über der Seite des größern Quadrats, e f, einen Halbkreis, mache in demselben die Sehne i f = der Seite des kleineren Quadrats, a b, und ziehe i e, ist i e die Seite des verlangten Quadrats (Fig. 111).



Beweis. Es ist Dreieck e i f rechtwinkelig und der rechte Winkel bei i (§ 59, Zus. 6), daher sind e i und i f die Katheten und e f die Hypotenuse des rechtwinkeligen Dreiecks e i f, folglich

$$ei^2 + if^2 = ef^2,$$

daher $ei^2 = ef^2 - if^2$.

Zusatz 1. Nennt man die Hypotenuse = a, und die beiden Katheten b und c, so ist

$$\text{I. } a^2 = b^2 + c^2, \text{ also } a = \sqrt{b^2 + c^2}$$

$$\text{II. } b^2 = a^2 - c^2, \text{ und } b = \sqrt{a^2 - c^2}.$$

Wenn also von einem rechtwinkeligen Dreiecke zwei Seiten gegeben sind, so läßt sich auch die dritte durch Rechnung finden.

Es sei die eine Kathete = 4′ 6″, die andere = 3′ 2″, so ist die Hypotenuse $a = \sqrt{(46)^2 + (32)^2} = 56', 0 \ldots$

Es sei die Hypotenuse = 56′ und die eine Kathete = 3′ 2″, so ist die andere Kathete

$b = \sqrt{(56)^2 - (32)^2} = 45', 9 \ldots$; also beinahe 46.

Es müßte genau 46 herauskommen, wenn in ersterer Aufgabe die Hypotenuse bis auf mehrere Decimalstellen berechnet wäre.

Sind beide Katheten einander gleich, also b = c, so ist

$$a = \sqrt{b^2 + b^2} = \sqrt{2\,b^2} = b\sqrt{2}.$$

Zusatz 2. Wenn die Seite des einfachen Quadrats = 1 gesetzt wird, so ist die des zweifachen $= \sqrt{2}$.

Dann setzt man in vorhergehende Gleichung I. b = c = 1, so erhält man $a = \sqrt{2}$.

Die Seite eines dreifachen Quadrats ist $= \sqrt{3}$.

Nämlich in (Fig. 109.) ist, wenn a b = b d = 1 gesetzt wird, $ad = \sqrt{2}$, nun ist auch a e = a b = 1, daher d e

$$= \sqrt{(\sqrt{2})^2 + 1^2} = \sqrt{2+1} = \sqrt{3}.$$

Die Seite des vierfachen Quadrats ist $= \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1} = \sqrt{4} = 2$;

Die Seite eines fünffachen Quadrats nach (Fig. 110.) ist

$$= \sqrt{ef^2 + fg^2} = \sqrt{2^2 + 1} = \sqrt{5} \text{ u. s. w.}$$

Zusatz 3. Die Seite eines Quadrats verhält sich zur Diagonale wie 1 zu $\sqrt{2}$.

§ 98. Erklärung. Die meisten Seiten der rechtwinkeligen Dreiecke stehen in einem irrationalen Verhältniß unter einander, wie wir so eben gesehen haben. Es giebt aber auch viele rechtwinkelige Dreiecke, deren Seiten in einem rationalen Verhältniß gegen einander stehen. Solche Dreiecke heißen Pythagoräische Dreiecke.

Wenn z. B. die beiden Katheten 3 und 4 sind, so ist die Hypotenuse $= \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$, also rational.

Wenn sich also die 3 Seiten eines rechtwinkeligen Dreiecks verhalten wie 3, 4, 5, so ist es ein Pythagoräisches Dreieck.

Zusatz 1. Das Verhältniß dieser drei Größen zu einander bleibt sich auch gleich, wenn man eine jede mit derselben Zahl multiplicirt. Drücken wir dieses Verhältniß allgemein aus, und bezeichnen diese Zahl mit m, so sind diese 3 Zahlen 3 m, 4 m, 5 m; wo m jede beliebige ganze und gebrochene Zahl sein kann.

Es sei $m = \frac{1}{3}$, so sind die beiden Sätze 1 und $\frac{4}{3}$, und die Hypotenuse $\frac{5}{3}$; es ist auch wirklich die

Hypotenuse $= \sqrt{1 + (\frac{4}{3})^2} = \sqrt{1 + \frac{16}{9}} = \sqrt{\frac{25}{9}} = \frac{5}{3}$.

Zusatz 2. Das Pythagoräische Dreieck gewährt ein einfaches Mittel, einen rechten Winkel zu construiren, indem man aus drei Linien von denen die eine 3, die zweite 4 und die dritte 5 gleiche Theile enthält, ein Dreieck zusammensetzt.

Nach Zus. 1 kann man auch drei Linien nehmen, die sich verhalten wie 6, 8, 10 oder wie 9, 12, 15 u. s. w.

Umgekehrt kann man auch vermittelst dieses Dreiecks untersuchen, ob ein Winkel ein rechter ist, z. B. ob ein Zimmer, ein Saal u. s. w. unter rechten Winkeln angelegt ist, indem man von der Ecke aus an der einen Wand 6 Fuß, und an der andern von derselben Ecke aus 8 Fuß abmißt, dann untersucht, ob die dritte Linie, die von dem einen Endpunkte bis zum andern der beiden gemessenen Linien geht, 10 Fuß enthält.

Zusatz 3. Außer diesem Verhältniß giebt es noch eine unzählige Menge andere, unter welchen die Seiten eines Pythagoräischen zu einander stehen, wie der folgende Paragraph zeigen wird.

§ 99. Um das rationale Verhältniß der Seiten eines Pythagoräischen Dreiecks gegen einander auf eine allgemeine Art auszudrücken, so sei wieder a die Hypotenuse, dann b und c die beiden Katheten, so ist unter anderem, wie aus (§ 97.) schon bekannt ist,

$$1)\ b = \sqrt{a^2 - c^2}.$$

Es kommt nun darauf an, den Ausdruck $\sqrt{a^2 - c^2}$ durch Einführung gewisser Größen in einen anderen zu verwandeln, welcher rational wird.

Man setze zuerst

2) $a = c + m$, wo m eine willkürlich angenommene Größe bedeutet, so ist aus (1) $b = \sqrt{(c+m)^2 - c^2} = \sqrt{c^2 + 2cm + m^2 - c^2} = \sqrt{(2c+m)m}$.

Man setze ferner den Werth von b, nämlich

$$\sqrt{(2c+m)m} = \frac{pm}{q},\text{ d. i.}$$

$$3)\ b = \frac{pm}{q},$$

wo p und q ebenfalls beliebige Werthe bezeichnen.

Man erhebe nun beide Seiten vorhergehender Gleichung ins Quadrat, so ist

$$(2c+m)m = \frac{p^2 m^2}{q^2},\text{ also } 2c + m = \frac{p^2 m}{q^2},\text{ daher } 2c = \frac{p^2 m}{q^2} - m = \frac{(p^2 - q^2)m}{q^2}$$

$$\text{folglich } c = \frac{(p^2 - q^2)m.}{q^2}$$

Setzt man in der Gleichung (2) statt c seinen Werth $\frac{(p^2 - q^2)m}{2q^2}$,

$$\text{so folgt } a = \frac{(p^2 - q^2)m}{2q^2} + m = \frac{(p^2 + q^2)m}{2q^2}.$$

Wir haben also, wenn wir der Uebersicht wegen die so eben abgeleiteten Werthe von a, b und c zusammenstellen,

$$a = \frac{(p^2 + q^2)m}{2q^2},\ b = \frac{pm}{q},\ c = \frac{(p^2 - q^2)m}{2q^2}.$$

Es wird sich nunmehr zeigen, daß die Ausdrücke $\sqrt{b^2 + c^2}$, $\sqrt{a^2 - c^2}$, oder $\sqrt{a^2 - b^2}$, wenn man die entsprechenden Werthe von a, b, c in dieselben setzt, rational werden.

Man kann daher für p, q und m jede beliebige ganze und gebrochene Zahl setzen, jedoch so, daß p immer größer als q ist.

Da die Größe m so wie sie oben (§ 97, Zus. 1), schon vorkommt, ein gemeinschaftlicher Factor der Werthe a, b, c ist, so ändert sie das Verhältniß derselben zu einander nicht, sondern stellt es nur in größeren oder kleineren Zahlen dar.

Nun wollen wir der Kürze wegen $m = 1$ setzen, so ist

$$4)\ a = \frac{p^2 + q^2}{2q^2},\ b = \frac{p}{q},\ c = \frac{p^2 - q^2}{2q^2}.$$

A. Es sei $q = 1$ und $p = 2$, so ist $a = \frac{5}{2}$, $b = 2$, $c = \frac{3}{2}$; oder wenn durchgängig mit 2 multiplicirt wird, $a = 5$, $b = 4$, $c = 3$, also dasselbe Verhältniß wie oben (§ 97, Zus. 1).

B. Ferner sei $q = 1$ und $p = 3$, so ist $a = 5$, $b = 3$, $c = 4$, also wieder dasselbe Verhältniß, nur mit verwechselten Werthen der beiden Katheten b und c.

C. Es sei $p = 3$, $q = 2$, so ist $a = \frac{13}{8}$, $b = \frac{3}{2}$, $c = \frac{5}{8}$, und wirklich ist $\sqrt{(\frac{3}{2})^2 + (\frac{5}{8})^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{25}{64}} = \sqrt{\frac{169}{64}} = \frac{13}{8}$.

D. Für $p = 5$, $q = 1$, ist $a = 13$, $b = 5$, $c = 12$, also dasselbe Verhältniß wie in (C), nur in größeren Zahlen und mit verwechseltem b und c, so wie es auf ähnliche Art in A und B stattfindet.

Um aber den Umstand, daß die Größen b und c in vorhergehender Weise abwechseln, zu vermeiden, und um zugleich die unendlich verschiedenen Verhältnisse zwischen a, b und c in den kleinsten Zahlen auszudrücken, so wollen wir zuerst in (4) die Brüche wegschaffen, also durchgängig mit $2\,q^2$ dividiren; woraus folgt

$$a = (p^2 + q^2),\ b = 2\,p\,q,\ c = (p^2 - q^2).$$

Nun sei $q = p - r$, so erhalten wir

5) $a = 2\,q\,(q + r) + r^2$; $b = 2\,q\,(q + r)$,
$c = r\,(2\,q + r)$.

Wenn nun q größer als r ist, so wird b in allen Fällen größer als c sein. Denn für $r = q$ wird $b = 4\,q^2$ und $c = 3\,q^2$, also um so mehr b größer als c, wenn q größer als r ist. Ist hingegen r größer als q, so können Fälle vorkommen, wo b oder c größer ist.

Sollen nun angeführte Verhältnisse in den kleinsten Zahlen erscheinen, so dürfen in q und r außer der Einheit, oder in 2 x und r keine gleichen Factoren vorkommen.

Es sei $q = 1, r = 1$, so erhält man für a, b, c nach der Reihe	5, 4, 3
„ $q = 2, r = 1$	13, 12, 5
„ $q = 3, r = 1$	25, 24, 7
„ $q = 4, r = 3$	63, 56, 33
„ $q = 5, r = 3$	89, 80, 39
„ $q = 1, r = 3$	17, 8, 15
„ $q = 2, r = 3$	29, 20, 21.

Und so lassen sich eine unzählige Menge dergleichen von einander wesentlich verschiedene Verhältnisse aufstellen, die in keinen kleineren ganzen Zahlen ausgedrückt werden können.

Setzen wir q und r verhältnißmäßig größer oder kleiner, so wird auch a, b, c in einem ähnlichen Maße größer oder kleiner, ohne daß sich das Verhältniß dieser Werthe zu einander ändert.

Es sei $q = 1$, $r = \frac{3}{2}$, so folgt .... $\frac{29}{4}$, 5, $\frac{21}{4}$ oder 29, 20, 21, also dasselbe Verhältniß wie in vorhergehendem Beispiele, wo $q = 2$ und $r = 3$, also jedes das Doppelte von den letztern 1 und $\frac{3}{2}$ ist.

Für $q = 4$ und $r = 6$ wird man erhalten.. 29.4, 20.4, 21.4.

Man mag also für q und r jeden nur denkbaren Bruch setzen, so wird zwischen a, b, c immer dasselbe Verhältniß dieser Größen hervorgehen, welches man durch q und r, wenn man dafür verhältnißmäßig ganze Zahlen nimmt, herleitet.

§ 100. **Erklärung.** Wenn zwei oder mehrere Linien, so wie es bei den Seiten des Pythagoräischen Dreiecks der Fall ist, ein **rationales** Verhältniß zu einander haben, so stehen auch die einzelnen gleichen oder ungleichen Theile der einen zu den gleichen oder ungleichen

entsprechenden Theilen der anderen in einem solchen Verhältniß. Die eine Linie kann also durch irgend einen Theil der anderen genau gemessen werden.

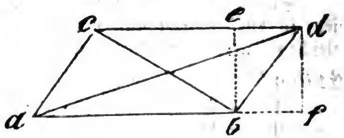
In diesem Fall heißen also die Linien commensurabel (meßbar).

Wenn hingegen zwei oder mehrere Linien in einem irrationalen Verhältniß zu einander stehen, so sind es auch einzeln genommen ihre übereinstimmenden Theile. Die eine kann also nicht mit geometrischer Schärfe durch Theile der anderen gemessen werden. Solche Linien heißen incommensurabel. — Es sei z. B. die eine Kathete 5 und die andere 3 Fuß, so ist die Hypatenuse $= \sqrt{34}$ Fuß.

Also stehen zwar die Katheten zu einander, nicht aber zur Hypotenuse in einem rationalen Verhältniß, d. h. sie sind mit der Hypotenuse incommensurabel, oder die Hypotenuse kann nicht durch irgend einen Theil der einen oder der anderen Kathete, z. B. durch 1 Fuß gemessen werden.

Aber ungeachtet der Incommensurabilität dieser Größen sind wir doch in den Stand gesetzt, der Wahrheit so nahe zu kommen, als auch nur geschehen kann. — Wenn man nämlich jede der gedachten Linien in eine sehr große Anzahl gleicher Theile theilt, so daß die Theile sehr klein werden, so wird das gegenseitige irrationale Verhältniß solcher Theile dem rationalen Verhältniß um so näher kommen, je kleiner dieselben sind.

Fig. 112.



§ 101. Lehrsatz. In einem jeden Parallelogramm ist die Summe der Quadrate der beiden Diagonalen der Summe der Quadrate der vier Seiten gleich.

Beweis. Man verlängere ab (Fig. 112.), und fälle df auf af und be auf cd senkrecht, so ist

$$1)\ ad^2 = (ab + bf)^2 + df^2 = ab^2 + 2ab.bf + (bf^2 + df^2)$$
$$= ab^2 + 2ab.bf + bd^2,$$

weil $bd^2 = bf^2 + df^2$ ist.

$$2)\ bc^2 = (cd - ed)^2 + be^2 = cd^2 - 2cd.ed + ed^2 + be^2$$
$$= cd^2 - 2cd.ed + bd^2.$$

Denn es ist $bd^2 = ed^2 + be^2$.

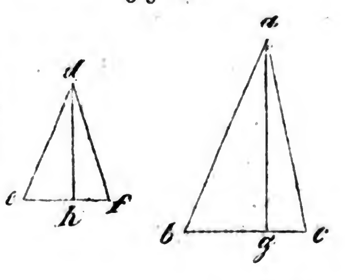
Folglich $ad^2 + bc^2 = ab^2 + 2ab.bf + bd^2 + cd^2 - 2cd.ed + bd^2$.

Da nun wegen $cd = ab$ und $ed = bf$ das Product $2ab.bf = 2cd.ed$ ist, und beide Producte sich heben, so ergiebt sich

$$ad^2 + bc^2 = ab^2 + bd^2 + cd^2 + bd^2.$$

§ 102. Lehrsatz. Aehnliche Dreiecke verhalten sich zu einander, wie die Quadrate ihrer ähnlich liegenden Seiten.

Fig. 113.



Beweis. Es sei Dreieck abc $\sim$ def (Fig. 113.); man fälle die Perpendikel ag, dh.

Nun sei der Kürze wegen

$ab = A$, $bc = B$, $ag = H$; und $de = a$, $ef = b$, $dh = h$,

so ist $A : B = a : b$

ingleichen $A : H = a : h$

also $A^2 : BH = a^2 : bh$,

oder $BH : bh = A^2 : a^2$.

Man dividire das vordere Verhältniß durch 2, so ist auch

$$\frac{BH}{2} : \frac{bh}{2} = A^2 : a^2.$$

Nun drückt $\frac{BH}{2}$ den Inhalt des Dreiecks abc, und $\frac{bh}{2}$ den des Dreiecks def aus, also ist der Satz erwiesen.

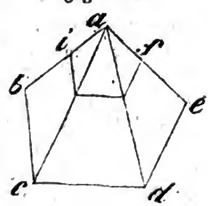
Zusatz 1. Eben so läßt sich beweisen, daß diese Dreiecke sich auch verhalten wie die Quadrate der Seiten ac und df, oder der Seiten bc und df.

Zusatz 2. Wenn eine Seite des größern Dreiecks z. B. 3mal größer ist als die gleichnamige des kleinern, so ist ersteres Dreieck 9mal größer als das kleinere; die Dreiecke verhalten sich also zu einander wie $9 : 1$, die Seiten aber wie $3 : 1$. Dasselbe Verhältniß findet bei jeder der 3 Seiten statt.

Zusatz 3. Gleichnamige Seiten, eben so die Höhen und Grundlinien ähnlicher Dreiecke, verhalten sich wie die Quadratwurzeln der Zahlen, welche das Verhältniß ihres Inhalts ausdrücken.

§ 103. Lehrsatz. Aehnliche geradlinige Figuren überhaupt verhalten sich wie die Quadrate ähnlich liegender Seiten.

Fig. 114.



Beweis. Es sei $abcde \backsim aihgf$ (Fig. 114.), man ziehe die Diagonalen ac, ad, so werde beide Figuren auf ähnliche Art in Dreiecke zertheilt, und es ist $abc \backsim aih$; $acd \backsim ahg$ u. s. w.

Man setze der Kürze wegen Dreieck $abc = P$, $aih = p$; $acd = P'$, $ahg = p'$; $ade = P''$, $agf = p''$, so ist nach (§ 102.)

$P : p = ac^2 : ah^2$

und $P' : p' = ac^2 : ah^2$

folglich $P : p = P' : p'$.

Nun ist aber auch 1) $P : p = ab^2 : ai^2$

und wegen $P' : p' = P : p$

folgt 2) $P' : p' = ab^2 : ai^2$.

Ferner ist $P'' : p'' = ad^2 : ag^2$

und $P' : p' = ad^2 : ag^2$

daher $P'' : p'' = P' : p'$

aber aus (2) ist $P' : p' = ab^2 : ai^2$

folglich 3) $P'' : p'' = ab^2 : ai^2$.

Aus den Proportionen 1, 2 und 3 geht hervor
$(P + P' + P'') : (p + p' + p'') = 3ab^2 : 3ai^2$ (vergl. Algebra, Seite 77.),
d. i. Figur $abcde : aihgf = 3\,ab^2 : 3\,ai^2$
$= ab^2 : ai^2$.

Anmerk. Die Richtigkeit der Proportion liegt darin, daß die Verhältnisse je zweier ähnlichen Dreiecke dieselben sind; wenn z. B. Dreieck aih die Hälfte von abc ist, so muß es auch Dreieck ahg von acd, ingleichen agf von ade sein.

Zusatz. Gleichnamige Seiten ähnlicher Dreiecke verhalten sich wie die Quadratwurzeln aus den Zahlen, welche das Verhältniß der Vielecke ausdrücken.

§ 104. Aufgaben.

1) Die Grundlinie eines Dreiecks sei 5 und seine Höhe 7 Fuß; man verlangt ein 3mal größeres diesem ähnliches Dreieck. Wie groß muß die Grundlinie und Höhe des letzteren werden?

Auflösung. Bezeichnet x die Grundlinie und y die Höhe des dreimal größeren Dreiecks, so ist

1) $1 : 3 = 5^2 : x^2$ (§ 102.)
also $x^2 = 75$ und $x = \sqrt{75} = 8,66\ldots$
2) $5 : 7 = 8,66 : y$,
also $y = 8,66 . 7 : 5 = 12,124$.

Der Inhalt des kleineren Dreiecks ist $= 5 . 7 : 2 = 17 \square',5$
und des größeren $= 8,66 . 12,124 : 2 = 52 \square',497$
und es ist wirklich $17,5 . 3 = 52,5$ statt $52,497$.

2) Die Grundlinie eines Dreiecks sei 18′ 6″ und seine Höhe 14′ 7″; man verlangt ein 3½mal kleineres ihm ähnliches. Wie groß muß die Grundlinie und Höhe des letzteren werdrn?

Auflös. Die Grundlinie wird 99″, 41, und die Höhe 78′, 58.

3) Es ist z. B. eine Figur und ihr Flächeninhalt $= 64 \square°$ gegeben, der Maßstab zu derselben aber verloren gegangen; man soll wieder einen Maßstab anfertigen. Wie wird dieser gefunden?

Auflös. Man mache einen beliebigen Maßstab und messe die Figur nach diesem. Gesetzt, man habe $49 \square''$ dadurch erhalten, so hat man den Maßstab zu groß angenommen.

Man nehme nun einen Theil des willkürlichen Maßstabes z. B. 1 Ruthe für die Einheit, und den gleichnamigen Theil des verlornen setze man = x.

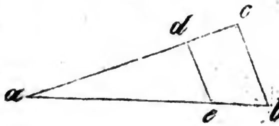
Man betrachte nun dieselbe Figur, da sie mit zweierlei Maße gemessen wird, als zwei verschiedene, aber ähnliche Figuren, zu deren einer die Einheit und zur anderen x als ein Theil des Maßstabes gehört. Daher ist nach (§ 102.)

$$64 : 49 = x^2 : 1$$
$$\text{folglich } x = \sqrt{\tfrac{49}{64}} = \tfrac{7}{8}.$$

Der verlorne Maßstab muß also um ⅛ kleiner werden, als der, mit welchem man zuletzt gemessen hat.

4) Ein gegebenes Dreieck durch eine Linie, welche mit irgend einer Seite desselben parallel läuft, in zwei gleiche Theile zu theilen (Fig. 115).

Fig. 115.



Auflösung. Es sei a b c das gegebene Dreieck, a d e die Hälfte desselben und d e die Parallele mit b c, welche gesucht werden soll. so ist

$$1 : \tfrac{1}{2} = (b\,c)^2 : (d\,e)^2, \text{ also } (d\,e)^2 = \tfrac{1}{2}(b\,c)^2,$$
$$\text{d. i. } b\,c : d\,e = d\,e : \tfrac{1}{2}\,b\,c.$$

Es muß also zwischen b c und ihrer Hälfte die mittlere geometrische Proportionallinie gesucht werden, welche = d e ist (Aufg. 14, S. 67).

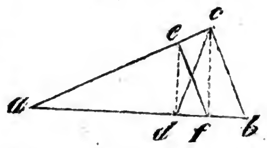
Zusatz. Statt d e kann man auch a e oder a d suchen; denn es ist eben sowohl

$\tfrac{1}{2}$ a b : a e = a e : a b, als auch $\tfrac{1}{2}$ a c : a d = a d : a c.

Ist dann a e oder a d gefunden, dann ergiebt sich auch leicht e d; indem man nur d e mit c b parallel zu ziehen braucht.

5) Ein gegebenes Dreieck durch eine gerade Linie aus einem gegebenen Punkt in der Seite in zwei gleiche Theile zu theilen.

Fig. 116.



Auflös. Es sei e der gegebene Punkt des Dreiecks a b c (Fig. 116.); man halbire zuerst a b in d und ziehe c d, so ist Dreieck a d c = d c b (§ 83, Aufg. 1).

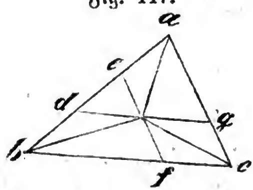
Dann ziehe man e d, ferner aus c ziehe man c f mit e d parallel, und ziehe e f, so ist Dreieck a e f gleich der Figur e c b f.

Der Beweis wird aus (§ 81.) klar.

Ist der Punkt e zu nahe an a, so fällt die Parallele c f außerhalb des Dreiecks; in diesem Fall kann man die Theilung so bewerkstelligen, daß man b c statt a b halbirt; wodurch dann c f auf b c fällt.

6) Ein Dreieck a b c (Fig. 117.) in 3 gleiche Theile zu theilen, so daß die Theilungslinien in die Spitze des Dreiecks fallen.

Fig. 117.



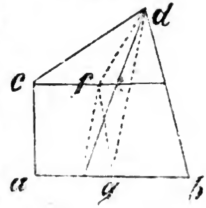
Auflös. Man theile a b in drei gleiche Theile, ziehe durch e eine Parallele e f mit a c und durch d eine Parallele d g mit b c. Der Durchschnittspunkt, der h heißen mag, ist der gesuchte Punkt.

Beweis. Da der Abstand der Linie d g von b c dem dritten Theil der Höhe des Dreiecks a b c gleich ist, so ist jedes Dreieck über b c, dessen Spitze in d g fällt, = $\tfrac{1}{3}$ a b c; daher auch Dreieck b h c = $\tfrac{1}{3}$ a b c.

Eben so ist Dreieck a h c = $\tfrac{1}{3}$ a b c, weil auch der Abstand der Linie e f von a c dem dritten Theil der Höhe von a c nach b gleich ist, folglich muß auch Dreieck a b h dem dritten Theile des ganzen Dreiecks gleich sein. Also ist das Dreieck a b c durch h b, h c und h a in drei gleiche Theile getheilt.

7) Eine vierseitige Figur a b d c (Fig. 118.) durch eine gerade Linie, welche von irgend einem Winkelpunkte d ausgeht, in zwei gleiche Theile zu theilen.

Fig 118.



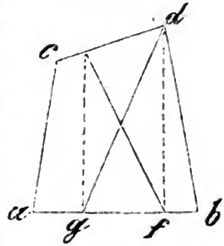
Auflös. Man ziehe c e zu a b parallel, halbire c e in f und a b in g, dann ziehe man f g, d f und d g, ferner f h zu d g parallel, endlich ziehe man d h, so ist Dreieck h d b gleich der Figur h a c d.

Beweis. Vermöge der Construction ist a b e c ein Trapez, welches durch f g in zwei gleiche Trapeze getheilt ist (§ 90.); ingleichen ist Dreieck c f d = e f d folglich

Trapez a g f c + Dreieck c f d = Trap. g b e f + Dreieck e f d d. i.
Figur a g f d c = b d f g.

Nun ist die vierseitige Figur b d f g nach (Aufg. 3, Seite 48.) in das Dreieck b d h verwandelt, daher Dreieck h d b = Fig. h d c a.

Fig. 119.



8) Ein Viereck a b d c durch eine gerade Linie aus einem gegebenen Punkte in der Seite in zwei gleiche Theile zu theilen (Fig. 119).

Auflös. Es sei e der gegebene Punkt; dann theile man zuerst die Figur nach vorhergehender Aufgabe durch d g in zwei gleiche Theile, ziehe e g, dann d f mit e g parallel und ziehe endlich e f, so ist b d e f = a c e f.

9) In ein gegebenes Dreieck ein ihm ähnliches zu beschreiben, so daß die Spitzen des letzteren in den Seiten des ersteren liegen.

Man halbire die Seiten des gegebenen Dreiecks und verbinde die Halbirungspunkte mit geraden Linien; und diese bilden das verlangte Dreieck.

10) Einen Ausdruck für den Flächeninhalt eines gleichseitigen Dreiecks aus der gegebenen Seite zu finden.

Bezeichnet man die Seite mit a, so ist der Ausdruck $= a^2 \sqrt{3} : 4$.

11) Ein Parallelogramm aus einem gegebenen Punkt außerhalb durch eine einzige Linie in zwei gleiche Theile zu theilen.

Man theile das Parallelogramm durch eine Parallele, halbire dieselbe und ziehe von dem gegebenen Punkt durch den Theilungspunkt eine gerade Linie.

12) Ein Trapezium durch eine gerade Linie zwischen den parallelen Seiten in zwei gleiche Theile zu theilen.

Auflösung. Es sei die größere der parallelen Seiten = a, die kleinere = b und die Höhe des Trapeziums = h; ferner die gerade, den beiden Seiten ebenfalls parallele Linie = z und ihr Abstand von der größeren Seite = x. Also ist der Inhalt der einen Hälfte, den wir mit A bezeichnen wollen

$$1)\ A = (a + z)\ x : 2.$$

Der Inhalt des ganzen Trapezes ist $= (a + b)\ h : 2$ und es soll werden

2) $[(a+z)x : 2] = (a+b)h : 4$ oder $(a+z)x = (a+b)h : 2$.

Nun ist $[h : (a-b)] = (h-x) : (z-b)$; also folgt

3) $h - x = (z-b)h : (a-b)$, und $x = (a-z)h : (a-b)$.

Die Einsetzung dieses Werthes von x in die Gleichung (2) statt x giebt

$(a+z)(a-z)h : (a-b) = (a+b)h : 2$, oder durch Division beider Seiten mit h und Multiplikation mit $(a-b)$,

$(a+z)(a-z) = (a+b)(a-b) : 2$ d. i. $a^2 - z^2 = a^2 - b^2$

oder $z^2 = (a^2 + b^2) : 2$,

woraus folgt

$$z = \sqrt{a^2 + b^2 : 2}.$$

Da wir nun z gefunden haben, so ist die Aufgabe gelös't, weil nunmehr auch x bekannt ist.

Man setze nun den so eben erhaltenen Werth von z in obige Gleichung (3) rechter Hand, so ergiebt sich

$$x = (a - \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}})h : (a-b).$$

Um sich von der Richtigkeit dieser Werthe zu überzeugen, darf man nur die so eben hergeleiteten Werthe von z und x in obige Gleichung (1) setzen, wodurch man $(a+b)h : 4$ erhalten wird.

Es sei $a = 8$, $b = 6$, $h = 4$ Fuß, so ist $z = \sqrt{50}$
$x = (8 - \sqrt{50})2$, also folgt aus (1)
$A = [(8 + \sqrt{50}) : 2).(8 - \sqrt{50})2 = (8 + \sqrt{50})(8 - \sqrt{50})$,
also $A = 64 - 50 = 14$ □';
und $(a+b)h : 4 = (8+6)4 : 4 = 14$ □', also wie vorher.

Bemerkung. Wegen vorhergehender Wurzelgrößen (s. Algebra, Seite 70 u. s. w.)

13) Es soll folgender Satz bewiesen werden:

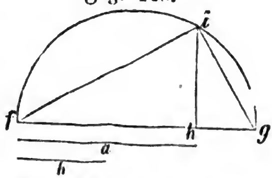
Wenn man in einem gleichseitigen Trapez d. h. einem solchen, dessen nicht parallele Seiten einander gleich sind, die Diagonalen und durch ihren Durchschnittspunkt eine Senkrechte auf die beiden parallelen Seiten zieht, so sind

1) die Diagonalen einander gleich; die Abschnitte der Diagonalen, welche nach den Endpunkten derselben parallelen Seite hingehen, einander gleich.

2) Sind alle vier Winkel um den Durchschnittspunkt herum einander gleich, welche die Senkrechte mit den Diagonalen bildet.

Man vergleiche deshalb (§ 51, Aufg. 15).

Fig. 120.

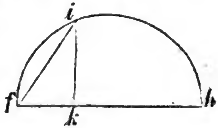


14) Zu zwei gegebenen geraden Linien a und b die mittlere Proportionale zu finden, d. h. die geometrische.

Auflös. I. Man bilde die Summe der beiden geraden Linien, $a + b$, nehme diese als Durchmesser = fg und ziehe den Halbkreis (Fig. 120.), errichte aus dem Punkte h, wo beide Linien zusammenstoßen, eine Senkrechte hi bis an den Kreis, so ist diese die verlangte mittlere Proportionale.

Beweis. Man ziehe if und ig, so ist fig ein rechtwinkeliges Dreieck und der rechte Winkel bei i; alsdann vergleiche man (§ 74).

Fig. 121.



Auflös. II. Man nehme die größere der beiden Linien als Durchmesser, fh = a (Fig. 121.), beschreibe über demselben einen Halbkreis und mache fk = b, errichte aus k die Senkrechte ki bis an den Kreis und ziehe fi, so ist fi die verlangte mittlere Proportionale (vgl. § 74, Zus. 1).

15) Ein Rechteck in ein Quadrat zu verwandeln.

Auflös. Man suche zu den beiden ungleichen Seiten d. h. zur Grundlinie und Höhe die mittlere geometrische Proportionale, so ist diese die Seite des verlangten Quadrats.

16) Ein Trapezium in ein Quadrat zu verwandeln.

Auflös. Man verwandele das Trapezium zuerst in ein Rechteck, indem man die mittlere arithmetische Proportionale seiner parallelen Seiten zu der einen Seite des Rechtecks macht (§ 91.), und vollende das Uebrige nach vorhergehender Aufgabe.

17) Ein schiefwinkeliges Parallelogramm in ein Quadrat zu verwandeln.

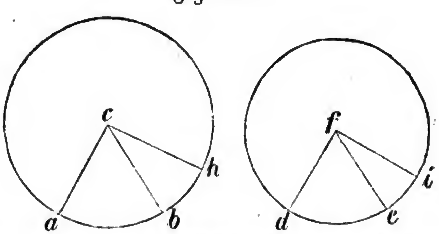
Auflös. Man verwandle das schiefwinkelige Parallelogramm in ein rechtwinkeliges und verfahre wie vorher.

Zusatz. Es wird aus vorhergehender Aufgabe auch einleuchten, wie man ein jedes beliebige Dreieck, Viereck und Vieleck in ein Quadrat verwandeln könne (vergl. § 95; S. 48, Aufg. 6).

Sechster Abschnitt.

Erweiterung der Kenntniß vom Kreise mit Bezug auf Aehnlichkeit und Ausmessung.

Fig. 122.



§ 105. Erklärung. Aehnliche Bogen eines Kreises heißen Bogen verschiedener Kreise, die zu ihrer Peripherie einerlei Verhältniß haben, oder einen gleich großen Theil ihrer Peripherien ausmachen.

§ 106. Lehrsatz. Gleiche Winkel am Mittelpunkte verschiedener Kreise fassen ähnliche Bogen zwischen ihre Schenkel.

Beweis. Es sei der Winkel a c b = d f e (Fig. 122.); man errichte aus c ein Perpendikel c h auf a e und aus f ein Perpendikel f i auf d f, so ist Winkel a c b : a c h = Bogen a b : a h (§ 55, Zus. 2.)

und d f e : d f i = ... d e : d i

folglich a b : a h = ... d e : d i.

Bezeichnet man den Umfang des größeren Kreises mit P und des kleineren mit p, so ist a h = $\frac{1}{4}$ P und d i = $\frac{1}{4}$ p,

daher a b : $\frac{1}{4}$ P = d e : $\frac{1}{4}$ p, oder a b : d e = $\frac{1}{4}$ P : $\frac{1}{4}$ p,
= P : p.

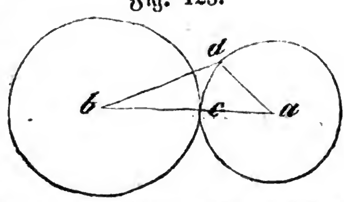
Zusatz. Theilt man nun die Peripherien mehrerer ungleichen Kreise in eine beliebige Anzahl unter sich gleicher Theile z. B. in 360, so sind die Theile, welche kleine Bogen sind, in den ungleichen Kreisen sich gegenseitig ähnlich und gehören zu gleichen Winkeln am Mittelpunkte, z. B. es wäre m der hundertste Theil des Kreises f und auch n der hundertste Theil des Kreises c, so wären die Winkel bei f und c einander gleich und die Bogen m und n einander ähnlich.

Bemerk. Um den Winkel in bestimmten Theilen seines zugehörigen Bogens anzugeben (§ 57.), hat man den Kreis in 360 gleiche Theile, die man Grade nennt, jeden Grad in 60 Minuten und jede Minute in 60 Secunden eingetheilt — eine Eintheilung, die übrigens ganz willkürlich ist. Die Grade bezeichnet man mit (°), die Minuten mit (′) und die Secunden mit (″), z. B. 4° 8′ 12″ heißt 4 Grad, 8 Minuten, 12 Secunden.

Von Berührungen der Kreise.

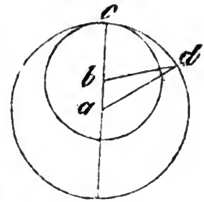
§ 107. Lehrsatz. Wenn die Mittelpunkte zweier Kreise um die Summe ihrer Halbmesser von einander abstehen, so berühren die Kreise einander von außen, und wenn sie um die Differenz ihrer Halbmesser abstehen, so berühren sie einander von innen.

Fig. 123.



Beweis I. Der eine Kreis sei um a mit dem Halbmesser a c und der andere um b mit dem Halbmesser b c beschrieben (Fig. 123.), so haben beide Kreise den Punkt c und außerdem keinen andern mit einander gemein. Denn gesetzt, sie hätten noch einen andern Punkt d, mit einander gemeinschaftlich, so ziehe man b d und a d, alsdann wäre b d = b c; folglich, da a c = a d als Halbmesser ist, wäre b d + a d = b c + a c = a b, welches unmöglich ist. Beide Kreise haben also nur den Punkt c mit einander gemeinschaftlich, und liegen ganz außerhalb einander, folglich berühren sie einander in c von außen.

Fig. 124.

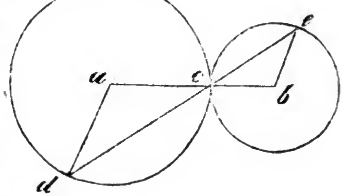


Beweis II. Es sei (Fig. 124.) wiederum a c der Halbmesser des größeren und b c der Halbmesser des kleineren Kreises, daher a b = a c — b c; dann haben beide Kreise nur den Punkt c gemeinschaftlich. Denn man nehme an, es sei d noch ein zweiter Berührungspunkt, so müßte auch b d = b c, folglich, a b + b d = a b + b c sein, weil a c = a d ist; welches unmöglich ist, weil zwei Seiten eines Dreiecks a b + b d der dritten a d gleich wären.

Zusatz. Wenn Kreise einander in einem Punkte berühren, so geht die gerade Linie, die durch ihre Mittelpunkte gezogen wird, durch den Berührungspunkt.

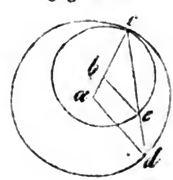
§ 108. Lehrsatz. Wenn zwei Kreise einander berühren, so theilt jede gerade Linie, die durch den Berührungspunkt geht, und die Kreise schneidet, beide in ähnliche Bogen.

Fig. 125.



Beweis. I. Es werde der Kreis um a von dem Kreise um b in dem Punkte c von außen berührt und durch c die Linie d e willkürlich gezogen (Fig. 125.); man verbinde beide Mittelpunkte durch die gerade Linie a b, die zugleich durch c geht und ziehe a d, b e. Alsdann ist Dreieck a c d ∽ b c e, weil beide gleichschenkelig und die Winkel bei c als Scheitelwinkel einander gleich sind, daher ist auch d = e, und folglich a = b. Folglich ist der Bogen d h c ∽ c g e (§ 106.) und daher auch d f c ∽ c i e.

Fig. 126.



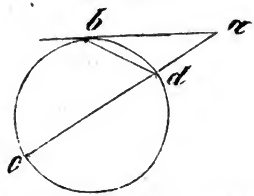
Beweis II. Beide Kreise (Fig. 126.) berühren einander von innen in c und es sei durch c die Linie c d willkürlich gezogen, die den inneren Kreis in e schneidet; man ziehe durch a und b die Linie a c, dann b e und a d; so ist Dreieck a c d ∽ b c e; denn beide sind gleichschenkelig und haben den Winkel c gemeinschaftlich, folglich ist auch e = d, daher auch Winkel a = b. Folglich ist auch der Bogen d f c ∽ e g c, und daher Dr. d a c ∽ e b c.

Zusatz. Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke folgt: c d : c e = a c : b c d. h. die Sehnen zweier Kreise, die ähnlichen Bogen zugehören, verhalten sich wie die Halbmesser der Kreise.

Proportion gerader Linien am Kreise.

§ 109. Lehrsatz. Wenn man von einem beliebigen Punkte a außerhalb des Kreises (Fig. 127.) eine Tangente ab, dann eine zweite willkürliche Linie ac zieht, die den Kreis schneidet, so ist die Tangente ab die mittlere Proportionallinie zwischen der anderen Linie ac und ihrem äußeren Abschnitt ad.

Fig. 127.

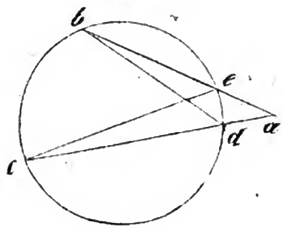


Beweis. Man ziehe bc und bd, so ist Dreieck abc ∽ abd; denn beide Dreiecke haben den Winkel a gemeinschaftlich, dann ist Winkel c = abd (§ 64.), folglich auch Winkel abc = adb.

Folglich ist ac : ab = ab : ad.

Zusatz 1. Umgekehrt, wenn die Proportion ac : ab = ab : ad stattfindet, so ist ab eine Tangente. Denn unter dieser Voraussetzung muß Dreieck abc ∽ abd sein, folglich ist Winkel abd = c.

Fig. 128.



Zusatz 2. Wenn beide Linien ab und ac den Kreis schneiden (Fig. 128.), so verhalten sie sich umgekehrt, wie ihre äußeren Abschnitte, nämlich es ist ab : ac = ad : ae.

1) Denn man denke sich eine Tangente af gezogen, so ist

ab : af = af : ae
und auch ac : af = af : ad

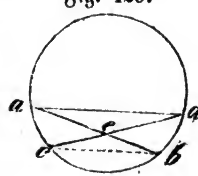
folglich ab : ac = ad : ae.

2) Man ziehe bd und ce, so ist Dreieck abd ∽ aec: denn es ist Winkel b = c, und Winkel a ist beiden gemeinschaftlich, folglich auch Winkel aec = adb, daher

ab : ac = ad : ae.

Zusatz 3. Aus erhaltener Proportion folgt, ab.ae = ac.ad, d. h. die Producte der Linien ab, ac, mit ihren äußeren Abschnitten ae, ad sind einander gleich.

Fig. 129.



§ 110. Lehrsatz. Wenn zwei Sehnen ab, cd einander in e schneiden, so sind die abgeschnittenen Theile im umgekehrten Verhältniß (Fig. 129.)

Beweis. Man ziehe ad und bc, so ist Dreieck ade ∽ bce, weil die Winkel beide einander gleich sind, dann Winkel a = c und eben so b = d ist; folglich ist

ac : ed = ce : be,
daher be.ae = ed . ce,

d. h. die Producte der abgeschnittenen Theile sind einander gleich.

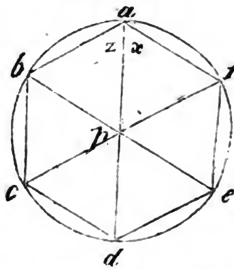
Zusatz. Sind beide Sehnen einander gleich, so sind auch die Theile der einen den Theilen der anderen gleich, d. h. wenn ab = cd, so ist auch ae = ce und de = be; daraus folgt aber nicht, daß ae = eb sei (§ 53).

§ 111. Aufgabe. In und um einen Kreis ein Dreieck zu beschreiben, welches einem gegebenen ähnlich sei.

Auflös. Diese Aufgaben werden eben so gelös't, wie die (§ 65, Aufg. 3 und 4).

Denn das dort in und um den Kreis beschriebene Dreieck, welches einem gegebenen gleichwinkelig sei, ist ihm zugleich ähnlich.

Fig. 130.



§ 112. Lehrsatz. Wenn die Peripherie eines Kreises in irgend eine Anzahl gleicher Theile getheilt wird, und man zieht die Sehnen dieser Bogen, so entsteht dadurch ein regelmäßiges Vieleck.

Beweis. Es sei der Kreis um p z. B. in 6 gleiche Theile getheilt (Fig. 130.); man ziehe die Sehne ab, bc u. s. w., so entsteht ein regelmäßiges Sechseck. Denn 1) sind alle Seiten einander gleich, weil es Sehnen gleicher Bogen sind (§ 55.); 2) sind die Winkel unter einander gleich, weil sie alle auf gleich großen Bogen stehen, z. B. der Winkel abc steht auf dem Bogen afedc, welcher gleich ist der ganzen Peripherie weniger dem Bogen abc; und diese Größe hat jeder Polygonwinkel. Da diese Winkel alle einander gleich sind, so ist das Sechseck abcdef regelmäßig.

Zusatz 1. Die Centriwinkel eines regelmäßigen Vielecks sind einander gleich (§ 59.)

Zusatz 2. Die Dreiecke abp, afp, efp, die zwei Halbmesser des Kreises mit der Seite des Vielecks bilden, sind einander congruent; und alle Winkel derselben an den Grundlinien (d. h. an den Seiten des Vielecks) sind einander gleich.

Zusatz 3. Jeder Winkel an der Grundlinie dieser Dreiecke, wie x, y, z ist dem halben Polygonwinkel gleich, also gleich der Hälfte von z + x d. i. = x oder = z, wegen x = z.

Zusatz 4. Der Polygonwinkel und der Centriwinkel sind zusammen = 2 R d. h. z. B. Winkel baf + bpa = 2 R (§ 59, Zusatz).

Zusatz 5. Der Centriwinkel eines regelmäßigen necks ist = 360° : n, und der Polygonwinkel = 2 R weniger dem Centriwinkel, also

$$= 2\text{ R} - \frac{360°}{n}.$$

Zusatz 6. Im regelmäßigen Sechseck ist der Centriwinkel dem halben Polygonwinkel gleich, folglich sind die Dreiecke abp, apf u. s. w. gleichwinkelig, also auch gleichseitig. Folglich ist die Seite des regelmäßigen Sechsecks dem Halbmesser gleich. —

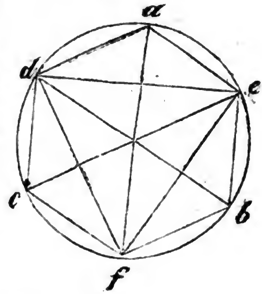
Der Centriwinkel des Sechsecks hat demnach 60° und der Polygonwinkel 120°.

Zusatz 7. Man kann daher ein regelmäßiges Sechseck in einen Kreis verzeichnen, wenn man vermittelst des Halbmessers die Peripherie in 6 gleiche Theile theilt, und die Sehnen derselben zieht.

Zusatz 8. Verbindet man je zwei solcher Abtheilungen durch eine Sehne, so erhält man ein regelmäßiges Dreieck z. B. d e f (Fig. 131.), und durch fortgesetztes Halbiren einer jeden Abtheilung kann man ein regelmäßiges Vieleck von 12, 24, 48 u. s. w. Seiten verzeichnen.

Zusatz 9. Eine Sehne durch die Mitte eines Halbmessers senkrecht gezogen, ist ebenfalls die Seite eines regelmäßigen Dreiecks.

Fig. 131.

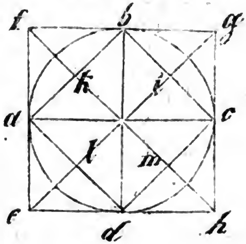


§ 113. Aufg. Ein regelmäßiges Viereck in und um den Kreis zu beschreiben.

Auflösung. Man theile den Kreis durch einen Halbmesser in 2 Halbkreise, halbire jeden Halbkreis und ziehe die dazu gehörigen Sehnen, so hat man das Viereck a b c d im Kreise (Fig. 132).

Um ein Viereck um den Kreis zu zeichnen, ziehe man durch die Punkte a, b, c, d Tangenten und verlängere sie genugsam nach beiden Seiten, so ist e f g h das verlangte Viereck (dieselbe Figur).

Fig. 132.

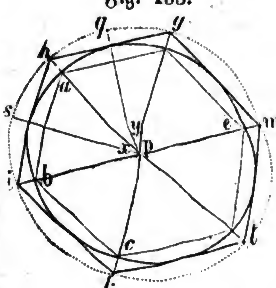


§ 114. Aufgabe. Um einen Kreis ein regelmäßiges Sechseck zu beschreiben.

Auflös. Man beschreibe zuerst in den Kreis ein regelmäßiges Sechseck (§ 112, Zus. 7.), dann halbire man einen Bogen h q g in q und ziehe die Tangente g h (Fig. 133.); ferner mache man p i, p k, p l, p m = p h = p g und verbinde die Punkte i, k, l, m mit geraden Linien h i, i k u. s. w., so sind diese gleichfalls Tangenten und einander gleich; folglich ist dieses das verlangte Sechseck.

Beweis. Da vermöge der Construction p i = p h = p g und Winkel x = y ist, so ist auch h i = h g, und da überdieß, wenn h i in s halbirt wird, auch p s = p q ist, so muß auch h i eine Tangente sein. Dasselbe läßt sich mit den übrigen Seiten i k, k l u. s. w. darthun.

Fig. 133.



Zusatz 1. Da bei r und q rechte Winkel sind, so laufen die Seiten gh, hi den Seiten af, ab u. s. w. parallel.

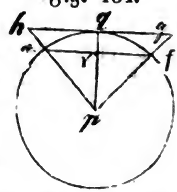
Anmerk. Es ist nicht nothwendig, das innere Sechseck zuerst zu beschreiben, sondern man kann sogleich an die Mitte der Bogen ab, bc u. s. w. die Tangenten hi, ik u. s. w, ziehen. Dasselbe gilt auch von jedem anderen Polygon.

Zusatz 2. Auf ähnliche Weise kann man zu jedem in dem Kreise beschriebenen regelmäßigen Vieleck ein anderes von gleich vielen Seiten um den Kreis beschreiben.

Zusatz 3. Es verhält sich $hg : af = pq : pr$; also auch $n.hg : n.af = pq : pr$ d. h. der Umfang des inneren Vielecks von n Seiten verhält sich zum Umfange des äußeren, wie die Höhe eines Dreiecks der inneren Figur zum Halbmesser.

§ 115. Aufgabe. Der Inhalt eines regelmäßigen Vielecks von n Seiten zu finden, wenn eine Seite $= p$ und der Halbmesser des umschriebenen Kreises $= r$ gegeben ist.

Fig. 134.



Auflös. Man zertheile das Vieleck in lauter Dreiecke durch Linien aus dem Mittelpunkte nach den Winkelpunkten, suche den Inhalt eines dieser Dreiecke, und multiplicire ihn mit der Anzahl der Seiten. Dieß giebt den Flächeninhalt des Vielecks. Denn die Dreiecke sind alle einander congruent.

Der Inhalt eines Dreiecks, wie afp, ist $= af.pr : 2$ (Fig. 134). Nun ist

$$pr = \sqrt{pf^2 - rf^2} = \sqrt{r^2 - rf^2}.$$

Da nun $rf = \frac{1}{2} p$, so ist, wenn $pr = h$ als die Höhe des Dreiecks gesetzt wird, $h = \sqrt{r^2 - \frac{1}{4} p^2}$, folglich

$$\text{Dreieck } paf = \tfrac{1}{2} p h = \tfrac{1}{2} p \sqrt{r^2 - \tfrac{1}{4} p^2}$$

folglich der Inhalt von n solchen Dreiecken, oder das Polygon

$$\tfrac{1}{2} np \sqrt{r^2 - \tfrac{1}{4} p^2} = \tfrac{1}{4} np \sqrt{4 r^2 - p^2}.$$

Zusatz 1. Da np den ganzen Umfang des Vielecks ausdrückt, so findet sich auch der Flächeninhalt, wenn man den halben Umfang des Vielecks mit der ganzen Höhe, oder den ganzen Umfang mit der halben Höhe eines seiner Dreiecke multiplicirt. Beides drückt dieselbe (letzte) Formel aus.

Zusatz 2. Ein regelmäßiges Vieleck ist einem Dreiecke gleich, dessen Grundlinie dem Umfange des Vielecks und dessen Höhe der Höhe eines seiner Dreiecke gleich ist.

Zusatz 3. Im regelmäßigen Sechseck ist eine Seite desselben dem Halbmesser des Kreises gleich, also in letzterer Formel $p = r$, daher ist der Flächeninhalt desselben $= \frac{3 r^2}{2} \sqrt{3}$.

Setzt man $r = 1'$, so ist der Flächeninhalt $= \frac{3}{2} \sqrt{3} = \frac{3}{2}$; $1{,}732 = 2{,}598 \,\square'$, für $r = 4'$ ist derselbe $= 24 \sqrt{3} = 41{,}568 \,\square'$.

Anmerk. Die Größe p hängt von der Anzahl der Seiten ab; sie kann daher nicht willkürlich angenommen werden.

Zusatz 4. Wenn q die Seite des um den Kreis beschriebenen Vielecks ausdrückt, so ist r = der Höhe eines seiner Dreiecke, daher der Umfang des ganzen Vielecks = n q, folglich sein Flächeninhalt

$$= n q . \frac{r}{2}.$$

§ 116. Lehrsatz. Regelmäßige Vielecke von gleich vielen Seiten sind ähnliche Figuren.

Beweis. Es sind 1) die Winkel in Vielecken von gleich vielen Seiten gleich. Denn die Größe des Polygonwinkels hängt nur von der Anzahl der Seiten und nicht von ihrer Größe ab. Da 2) die Seiten eines regelmäßigen Vielecks einander gleich sind, so haben sie in allen regelmäßigen Vielecken einerlei Verhältniß unter einander. Folglich sind regelmäßige Vielecke von gleich vielen Seiten ähnliche Figuren.

Zusatz 1. Die Umfänge regelmäßiger Vielecke von gleich vielen Seiten verhalten sich wie die Seiten dieser Vielecke: denn z. B. der Umfang des in den Kreis beschriebenen Sechsecks (Fig. 133.) ist = 6 a f, und der Umfang des um den Kreis beschriebenen ist = 6 h g; folglich

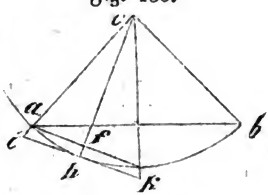
$$6\,af : 6\,gh = af : gh.$$

Daher verhalten sich auch die Umfänge solcher Vielecke wie die Halbmesser oder Durchmesser der in oder um sie beschriebenen Kreise.

Zusatz 2. Regelmäßige Vielecke von gleich vielen Seiten verhalten sich wie die Quadrate ihrer Seiten (§ 102.), ingleichen wie die Quadrate der Halb- oder Durchmesser der Kreise, in oder um welchen sie beschrieben sind.

§ 117. Aufg. Aus der Seite eines regelmäßigen Vielecks von nSeiten und dem Halbmesser des umschriebenen Kreises einen allgemeinen Ausdruck für die Seite eines regelmäßigen Vielecks von 2 nSeiten zu finden.

Fig. 135.



Auflös. Es sei a b = p die Seite des necks (Fig. 135.) und c a = r der Halbmesser des umschriebenen Kreises; man ziehe c e senkrecht durch a b, ingleichen ziehe man a e, so ist

$$ae^2 = ad^2 + de^2 = (\tfrac{1}{2}\,ab)^2 + (ce - cd)^2.$$

Nun ist $\frac{1}{2}\,ab = \frac{1}{2}\,p$ und $ce = r$, also $ae^2 = \frac{1}{4}p^2 + r^2 - 2\,cd.r + cd^2$.

Ferner ist $cd = \sqrt{ac^2 - ad^2} = \sqrt{r^2 - \frac{1}{4}\,p^2}$. Daher, wenn der Werth für c d eingesetzt wird,

$$ae^2 = \tfrac{1}{4}\,p^2 + r^2 - 2r\sqrt{r^2 - \tfrac{1}{4}\,p^2} + r^2 - \tfrac{1}{4}\,p^2$$

$$= 2\,r^2 - 2\,r\sqrt{r^2 - \tfrac{1}{4}\,p^2} = 2\,r\,[r - \sqrt{r^2 - \tfrac{1}{4}\,p^2}]$$

$$\text{und } ae = \sqrt{2r\,(r - \sqrt{r^2 - \tfrac{1}{4}\,p^2})}$$

Zusatz 1. Wenn n = 6 gesetzt wird, so ist auch p = 1 und a e als die Seite des Zwölfecks

$$= \sqrt{2\,(1 - \sqrt{\tfrac{3}{4}})} = \sqrt{2\,(1 - \tfrac{1}{2}\sqrt{3})} = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$$

$= 0{,}5176380\ldots$; also der ganze Umfang des Zwölfecks $= 12 . 0{,}517638 = 6{,}211656$.

Hieraus folgt, daß der Durchmesser des Kreises sich zum Umfange des in ihm beschriebenen Zwölfecks verhält, wie $1 : 3{,}105828$. Es ist nämlich $r = 1$ gesetzt, folglich ist der Durchmesser $= 2$, daher verhält sich der Durchmesser zum Umfange, wie $2 : 6{,}211656$ oder, wenn durch 2 dividirt wird, wie $1 : 3{,}105828$.

§ 118. Aus dem Umfange des in den Kreis beschriebenen Zwölfecks den Umfang des um ihn beschriebenen zu finden.

Auflös. Man fälle (Fig. 135.) aus c auf ae des Perpendikel cf, so ist $cf^2 = ce^2 - ef^2 = r^2 - ef^2 = 1 - ef^2$ für den Halbmesser $= 1$.

Nun ist aus vorhergehendem Paragraphen, Zusatz 1, $ef = \frac{1}{2}\, ae = \frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{3}}$, also $ef^2 = \frac{1}{4}(2 - \sqrt{3})$, folglich

$$cf^2 = 1 - \tfrac{1}{4}(2 - \sqrt{3}) = 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4}\sqrt{3} = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4}\sqrt{3} = \frac{2 + \sqrt{3}}{4}.$$

$$\text{Daher } cf = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}.$$

$$\text{Nun ist } cf : ae = ch : ik, \text{ also } ik = \frac{ae . ch}{cf};$$

und da $ch = r = 1$, $ae = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$ und $cf = \dfrac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}$ ist, so erhält man

$$ik = \sqrt{2 - \sqrt{3}} : \tfrac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{\sqrt{2 + \sqrt{3}}} = 2\sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}}$$

multiplicirt man Zähler und Nenner unter dem Wurzelzeichen mit $2 - \sqrt{3}$, so folgt nach Algebra, Seite 71,

$$ik = 2\sqrt{\frac{(2 - \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})}{(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})}} = 2\sqrt{\frac{(2 - \sqrt{3})^2}{4 - 3}} = 2(2 - \sqrt{3}) = 0{,}535898\ldots$$

also gleich der Seite des um den Kreis beschriebenen Zwölfecks für den Halbmesser $= 1$, und der Umfang dieses Zwölfecks ist $= 12 . 0{,}535898 = 6{,}430776\ldots$, also das Verhältniß des Durchmessers zu diesem Umfange wie $1 : 3{,}215388$.

Zusatz 1. Auf diesem Wege läßt sich nun aus der Seite des in den Kreis beschriebenen Zwölfecks die Seite und der Umfang des in und um den Kreis beschriebenen Vierundzwanzigecks, dann des Achtundvierzigecks u. s. w. berechnen.

Zusatz 2. Es ist einleuchtend, daß ein in oder um den Kreis beschriebenes Vieleck dem Kreise um so näher kommt, je größer die Anzahl seiner Seiten ist. Man kann daher schließen, daß, wenn diese Anzahl unendlich groß wäre, der Unterschied zwischen dem Vieleck und dem Kreise unendlich klein d. h. so viel als nichts sein würde. Man kann daher den Kreis als ein regelmäßiges Vieleck von unendlich vielen Seiten betrachten.

Zusatz 3. Kreise als regelmäßige Vielecke von unendlich vielen Seiten sind ähnliche Figuren (§ 103).

Zusatz 4. Die Peripherien der Kreise verhalten sich wie ihre Halb- oder Durchmesser.

Zusatz 5. Die Kreisflächen verhalten sich wie die Quadrate ihrer Halb- oder Durchmesser.

Zusatz 6. Ein Kreis ist einem Dreiecke gleich, dessen Grundlinie der Peripherie des Kreises, und dessen Höhe seinem Halbmesser gleich ist.

Zusatz 7. Daher ist auch ein Kreisausschnitt, als ein Theil des ganzen Kreises, gleich einem Dreieck, dessen Grundlinie dem Bogen des Ausschnitts und dessen Höhe dem Radius gleich ist.

Zusatz 8. Der Flächeninhalt eines Kreises wird daher gefunden, wenn man seine Peripherie mit der Hälfte des Halbmessers multiplicirt.

Zusatz 9. Der Quadratinhalt des Kreises verhält sich zum Flächeninhalte des umschriebenen regelmäßigen Vielecks, wie die Peripherie zum Umfange des Vielecks (§ 115, Zus. 4).

Berechnung des Kreises.

§ 119, Durch fortgesetzte Berechnung der regelmäßigen Vielecke in und um dem Kreise wie (§ 118.) angezeigt ist, hat man das Verhältniß des Durchmessers eines Kreises zum Umfange desselben annäherungsweise gefunden. Es ist z. B. die Seite eines regelmäßigen 768ecks = 0,008181208052, also der halbe Umfang des 768ecks = 3,14158 …., indem der Halbmesser = 1 gesetzt ist.

Auf diesem mühsamen Wege hat Ludolph van Ceulen, gewöhnlich von Cölln genannt, zuerst das Verhältniß des Durchmessers zur Peripherie wie

1 zu 3,14159265358979323846264338327950 ….

gefunden, also bis auf 32 Decimalstellen. Diese Zahl wird noch immer nach ihm die Ludolphische Zahl genannt, und in der Anwendung gemeiniglich mit π bezeichnet.

In späteren Zeiten ist sie aber durch bequemere Methoden und zwar jetzt bis auf 156 Decimalstellen berechnet.

Die Peripherie ist also etwas über dreimal so groß als der Durchmesser.

Dieses Verhältniß wird um so genauer, je mehr Decimalstellen man nimmt; indessen geben schon 6 oder 7 derselben in den meisten Fällen eine hinlängliche Genauigkeit, und folglich hat man nicht einmal diese alle nöthig. Oft begnügt man sich schon mit den beiden ersten, also mit dem Verhältniß 1 : 3,14, wofür man auch 100 : 314 zu setzen pflegt.

Anmerk. Schon in den frühesten Zeiten hat man sich viel Mühe gegeben, das Verhältniß des Durchmessers zur Peripherie in rationalen Zahlen darzustellen — eine Aufgabe, die mit der Quadratur des Kreises einerlei ist, weil diese auf jenem Verhältniß beruht.

Es ist aber bis jetzt alle Mühe fruchtlos geblieben.

Uebrigens ist die Ludolphische Zahl zu genauen Berechnungen mehr als hinreichend.

Zusatz. Da alle Kreise ähnliche Figuren sind, so ist auch das Verhältniß des Durchmessers zur Peripherie in allen gleich.

§ 120. **Aufg.** Aus dem gegebenen Halb- oder Durchmesser den Umfang eines Kreises in irgend einem Längenmaße zu finden.

Aufl. Man setze die gesuchte Peripherie $= p$ und den Halbmesser, der mit demselben Maße gemessen wird, $= r$, also den Durchmesser $= 2r$, so ist

$$1 : \pi = 2r : p \text{ (§ 118, Zus. 4)},$$

folglich 1) $p = 2r\pi$.

Ist der Durchmesser $= d$ gegeben, so ist die Peripherie

2) $p = d\pi$.

Zus. Aus (1) leitet man her

$$3)\ r = \frac{p}{2\pi},\ \text{und } 4)\ d = \frac{p}{\pi} \text{ aus (2).}$$

Dieß lehrt, aus der gegebenen Peripherie den Halb- oder Durchmesser finden.

§ 121. **Aufg.** Den Flächeninhalt eines Kreises zu finden, wenn der Halbmesser $= r$ gegeben ist.

Aufl. Man multiplicire die Peripherie mit dem halben Radius, so giebt das Product den Quadratinhalt des Kreises. (§ 118, Zus. 8.)

Setzt man den Quadratinhalt $= a$, so ist

5) $a = 2r\pi \cdot \frac{1}{2}r = r^2\pi$.

Zus. Nimmt man statt des Halbmessers den Durchmesser, so ist

6) $a = d\pi \cdot \frac{1}{4}d = \frac{1}{4}d^2\pi$.

Aus (5) folgt 7) $r = \sqrt{\frac{a}{\pi}}$, und daher 8) $p = 2\sqrt{a\pi}$.

Eben so geht aus (6) hervor

$$9)\ d = 2\sqrt{\frac{a}{\pi}}.$$

Setzt man aus (4) $\frac{p}{\pi}$ statt d in (6), so folgt

$$10)\ a = \frac{p^2}{4\pi}.$$

Uebersichtliche Darstellung angeführter Formeln.

Gegeben.	Gesucht.	Formel.
r	p	1) $p = 2r\pi$
	a	2) $a = r^2\pi$
d	p	3) $p = d\pi$
	a	4) $a = \frac{d^2\pi}{4}$
p	r	5) $r = \frac{p}{2\pi}$
	d	6) $d = \frac{p}{\pi}$
	a	7) $a = \frac{p^2}{4\pi}$
a	r	8) $r = \sqrt{\frac{a}{\pi}}$
	d	9) $d = 2\sqrt{\frac{a}{\pi}}$
	p	10) $p = 2\sqrt{a\pi}$

§ 122. Beispiele.

1) Wie groß ist der Umfang und der Flächeninhalt eines Kreises, dessen Halbmesser 4 Fuß beträgt?

Der Umfang ist = 25,12 Fuß und der Flächeninhalt = 50,24 Quadratfuß.

2) Wie groß ist der Umfang und der Inhalt eines Kreises, dessen Durchmesser 5′ 9″ hat?

Der Umfang ist = 1° 8′ 5″, 26, und der Flächeninhalt = 27 □′ 35 □″, 585.

3) Es sei der Flächeninhalt eines Kreises = 78,5375 Quadratfuß, wie groß ist sein Durchmesser? Antwort: 10 Fuß.

4) Die Peripherie eines Kreises sei = 5½ Fuß; man fragt nach seinem Halbmesser und seinem Quadratinhalt.

Der erstere ist = 8⅘ Zoll und der letztere = 2,41 Quadratfuß.

5) Die Peripherie eines Kreises sei = 1 Fuß, man verlangt seinen Durchmesser und seinen Flächeninhalt.

Der Durchmesser ist = 3″ 1‴, 8, und der Flächeninhalt = 7,96 Quadratzoll.

6) Der Quadratinhalt eines Kreises sei = 1 □′, wie groß ist sein Halbmesser?

Antwort. 3 Zoll, 1⅘ Linien nahe.

7) Ein Tisch sei 5¼ Fuß lang, 3½ Fuß breit; wie groß müßte der Durchmesser eines kreisrunden Tisches von gleichem Flächeninhalt werden?

Der Durchmesser muß werden 5,06 Fuß.

8) Der Halbmesser eines Kreises sei $= 3\frac{2}{3}$ Fuß; wie groß muß der Durchmesser eines $3\frac{2}{3}$ mal kleineren Kreises werden?

Auflösung. Es bezeichne x den Durchmesser, so ist
$3\frac{2}{3} : 1 = (3\frac{2}{3})^2 : (\frac{1}{2} x)^2$, also
$\frac{11}{2} : 1 = \frac{11 . 11}{9} : \frac{x^2}{4}$, folglich $x = 3{,}83 \ldots$ Fuß (vergl. § 102).

Berechnung der Kreisbogen, der Kreisausschnitte und Kreisabschnitte.

§ 123. Aufgabe. Die Länge eines Bogens von w Graden zu finden, wenn der Halbmesser $= r$ gesetzt ist.

Auflös. Da die Länge eines Bogens von w Graden sich zur Länge der ganzen Peripherie verhält wie w zu 360, so ist, wenn l die gesuchte Länge bezeichnet,

$$360 : w = 2 r \pi : l, \text{ also}$$

$$\text{I)} \quad l = 2 w r \pi : 360 = \frac{w r \pi}{180}.$$

Aus derselben Proportion folgt auch

$$\text{II)} \quad w = 180 l : r \pi.$$

Dieser Ausdruck lehrt, aus der gegebenen Länge eines Bogens und dem Radius des Kreises die Anzahl der Grade des ersteren finden.

Zusatz 1. Aus I) findet sich der Flächeninhalt eines Ausschnitts, wenn man den Bogen l seiner wirklichen Länge nach mit dem halben Radius r multiplicirt (§ 123, Zus. 1).

Bezeichnet man den Ausschnitt mit v, so ist

$$\text{III)} \quad v = \frac{w r \pi}{180} . \tfrac{1}{2} r = w r^2 \pi : 360.$$

Zusatz 2. Wenn man von dem Ausschnitte das Dreieck, welches die beiden Halbmesser mit der Sehne des Bogens bilden, abzieht, so ergiebt sich der Inhalt des Abschnitts. Aber den Inhalt des Dreiecks kann man ohne Hülfe der Trigonometrie nicht aus dem blosen Halbmesser und dem Bogen oder Winkel finden.

§ 124. Anwendungen.

1) Wie groß ist die Länge eines Bogens von 30 Grad 45 Minuten, wenn der Halbmesser 6 Fuß enthält?

Es ist $w = 30^\circ\, 45' = 30\frac{3}{4} = \frac{123^\circ}{4}$, und $r = 6$, also nach I.

$$l = \frac{123 . 6 . 3,14}{4} : 180 = 3{,}18 \ldots \text{ Fuß.}$$

2) Die Länge eines Kreisbogens betrage 5 und der Halbmesser 10 Fuß; man verlangt die Grade u. s. w. dieses Bogens.

Nach II) ist $w = 108 . 5 : 10 . 3{,}14 = 54 : 3{,}14$
$= 17^\circ, 197 = 17^\circ\, 11'\, 49'', 2.$

Es ist nämlich $\frac{197}{1000}$ Grad $= \frac{197}{1000} . 60$ Min. $= 11', 82$; dann $\frac{82}{100}$ Min. $= \frac{82}{100} . 60$ Sec. $= 49'', 2$.

3) Wie groß ist der Centriwinkel, dessen Bogen gleich dem Halbmesser ist?

Es ist hier $l = r$, also nach II.

$$w = \frac{180\,r}{r\pi} = 180 : 3{,}14 = 57^\circ\ 7'\ 44'',8 = 205664'',8 \text{ nahe.}$$

Dieser Winkel findet in der Astronomie seine gemessenen Anwendungen.

4) Der Winkel eines Ausschnitts sei $= 40^\circ\ 15'$, und der Halbmesser $= 8\frac{2}{3}$ Fuß; wie groß ist der Flächeninhalt des Ausschnitts?

Aus III. ist $v = \frac{161}{4}\left(\frac{26}{3}\right)^2 . 3{,}14 : 360 = 26{,}37 ..$ Quadratfuß.

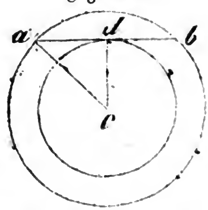
5) Wie verhält sich ein Kreisabschnitt, dessen Centriwinkel = 60 Grad ist, zu dem Abschnitt desselben Kreises, welcher zu einem Centriwinkel von 120 Grad gehört?

Der Flächeninhalt des ersteren Abschnitts ist $= \frac{r^2\pi}{6} - \frac{r^2\sqrt{2}}{4}$ und des letzteren $= \frac{r^2\pi}{3} - \frac{r^2\sqrt{3}}{4}$, also verhalten sich beide wie $(2\pi - 3\sqrt{3})$ zu $(4\pi - 3\sqrt{3})$, oder beinahe wie 1 zu 6,78.

§ 125. Erklärung. Kreise, die einerlei Mittelpunkt, aber verschiedene Halbmesser haben, heißen concentrisch, und der Flächenraum, der zwischen den Peripherien zweier concentrischen Kreise enthalten ist, heißt ein Ring (Fig. 136).

§ 126. Aufgabe. Den Inhalt eines Ringes zu finden, wenn die Halbmesser beider Kreises angegeben sind.

Fig. 136.



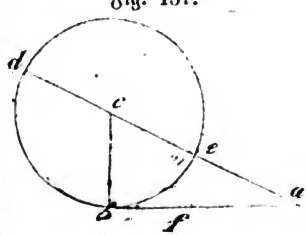
Aufl. Es sei der Halbmesser des größeren Kreises = R und des kleineren = r, so ist der Quadratinhalt des größeren $= R^2\pi$ und des kleineren $= r^2\pi$, folglich, wenn der Flächeninhalt des Ringes mit x bezeichnet wird,

$$x = R^2\pi - r^2\pi = (R^2 - r^2)\pi$$
$$= (R + r)(R - r)\pi.$$

Zus. Da $ad^2 = ac^2 - dc^2 = R^2 - r^2$, so ist $ad^2\pi = (R^2 - r^2)\pi$, d. h. der Inhalt des Ringes ist einem Kreise gleich, dessen Halbmesser ad, oder, dessen Durchmesser ab diejenige Sehne des größeren Kreises ist, welche den kleineren inneren berührt.

§ 127. Aufgabe. Eine gegebene gerade Linie, ab so in zwei Theile zu theilen, daß der größere Theil die mittlere geometrische Proportionale zwischen dem kleineren Theile und der ganzen Linie sei (Fig. 137).

Fig. 137.



Auflösung. Auf ab errichte man in b das Perpendikel bc, mache bc $= \frac{1}{2}$ ab, beschreibe um c mit bc einen Kreis, ziehe eine Linie ad, die den Kreis in e schneidet, und mache af = ae, so ist bf : af = af : ab.

Beweis. Da a b auf b c senkrecht, mithin eine Tangente ist, so folgt a e : a b = a b : a d,
daher a e : (a b — a e) = a b : (a d — a b). (Algebra, Seite 76 u. 77.)

Nun ist a e = a f, a b — a e = a b — a f = b f.
und, da nach der Construction b c = ½ a b, also a b = 2 b c = 2 c e = d e, so ist a d — a b = a d — d e = a e = a f, folglich

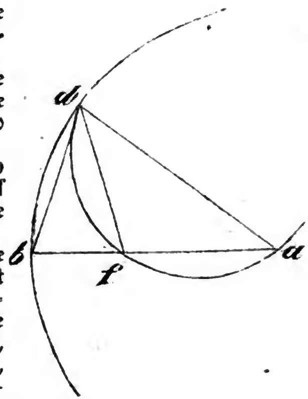
a f : b f = a b : a f, oder, durch Umkehrung,

b f : a f = a f : a b.

Anmerk. Die Theilung einer Linie auf diese Art heißt auch: eine Linie in stetiger Proportion theilen.

§ 128. Aufgabe. Ein gleichschenkeliges Dreieck zu beschreiben, in welchem der Winkel an der Grundlinie doppelt so groß als der Winkel sei, welcher der Grundlinie gegenüber liegt.

Fig. 138.



Aufl. Man nehme eine beliebige Linie a b an (Fig. 138), und theile sie nach § 127 in stetiger Proportion, so daß b f : f a = f a : a b werde.

Man beschreibe nun um a mit a b einen Kreis, mache die Sehne b d = a f und ziehe d a, so ist a b d das verlangte Dreieck.

Beweis. Da d b = a f die mittlere geometrische Proportionale ist zwischen b f und a b, so ist sie eine Tangente des Kreises, der durch die Punkte d, f und a geht (§ 109), folglich ist, wenn man d f zieht, Winkel q = z (§ 64), daher Winkel q + p = z + p = y. — Es ist nämlich der Kürze wegen gesetzt Winkel d b f = y, b f d = x, b d f = z, a d f = p, f a d = q.

Nun ist auch Winkel x = p + q, folglich y = x, daher d f = d b; nun ist aber b d = a f gemacht, daher ist auch d f = a f. Da nun Dreieck d f a gleichschenkelig, so ist Winkel p = q, folglich ist wegen y = x = p + q, Winkel y = 2 q.

Zusatz 1. Da auch Winkel b d a = y = 2 q ist, so betragen die Winkel an der Grundlinie zusammen 4 q, daher sind alle drei Winkel in einem solchen Dreieck zusammen = 5 q = 180 Grad, also q = 36 Grad.

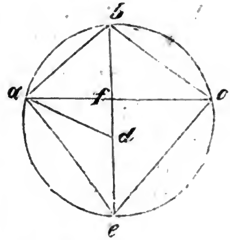
Zusatz 2. Da der Centriwinkel des regelmäßigen Zehnecks = 36° so ist b d die Seite des Zehnecks, wenn a b der Halbmesser des Kreises ist, und es ergiebt sich hieraus, wie ein solches Zehneck in einem jeden Kreise verzeichnet werden könne.

Zusatz 3. Verdoppelt man den Bogen b d, so daß b g = 2 b d werde, und zieht die Sehne b g, so ist diese die Sehne des regelmäßigen Fünfecks (vergl. Seite 87, Aufg. 11).

Zusatz 4. Aus dem regelmäßigen Zehneck kann nun auch leicht das regelmäßige Zwanzigeck, Vierzigeck u. s. w. abgeleitet werden.

§ 129. **Lehrsatz.** In einem Kreisviereck ist die Summe der Producte der gegenüberliegenden Seiten dem Producte der Diagonalen gleich, nämlich $ae.bc + ab.ec = be.ac$ (Fig. 139).

Fig. 139.



Beweis. Man ziehe ad so, daß Winkel $cad = baf$ werde, so ist, da auch Winkel $bca = aeb$ ist (§ 59, Zus. 3.), Dreieck $abc \backsim aed$; da ferner Winkel bad gleich cae, und Winkel ace gleich ist abe, so ist auch Dreieck $ace \backsim abd$.

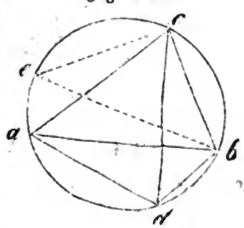
1) Daher ist $ae : ed = ac : bc$
2) .... $ab : bd = ac : ce$

aus 1) folgt $ae.bc = ed.ac$
und aus 2) $ab.ce = bd.ac$

also $ae.bc + ab.ce = ed.ac + bd.ac = (ed + db)\,ac.$
Nun ist nach der Figur $ed + db = be$, folglich
$$ae.bc + ab.ce = be.ac.$$
Dieser Satz wird nach seinem Erfinder Ptolemäus der Ptolemäische Lehrsatz genannt.

§ 130. **Lehrsatz.** Durchschneiden die Diagonalen eines Kreisvierecks (§ 59, Zus. 8.) einander rechtwinkelig, so ist nicht nur die Summe der Quadrate der gegenüberliegenden Seiten einander gleich, d. i. $ad^2 + bc^2 = ac^2 + bd^2$, sondern auch jede dieser Summen dem Quadrate des Durchmessers gleich (Fig. 140).

Fig. 140.



Beweis. Es ist $bc^2 = bf^2 + cf^2$;
und $ad^2 = af^2 + fd^2$;
daher $bc^2 + ad^2 = bf^2 + cf^2 + af^2 + fd^2$.

Der Summe dieser 4 Quadrate aber ist auch $ac^2 + db^2$ gleich. Daher $bc^2 + ad^2 = ac^2 + db^2$.

Ferner ziehe man den Durchmesser be und die Sehne ce, so ist $be^2 = ec^2 + bc^2$ (§ 59, Zus. 6).

Es ist aber Winkel $acf + caf = ceb + cbe = 1\,R$, und $caf = ceb$ (§ 59, Zusatz 3.); folglich Winkel $acf = cbe$, daher $ad = ce$; also $be^2 = bc^2 + ad^2$.

§ 131. Aufgaben verschiedenen Inhaltes.

1) Aus der Seite eines in dem Kreis beschriebenen Vierecks die Seite, den Umfang und den Flächeninhalt eines in und um den Kreis beschriebenen Achtecks und Sechszehnecks zu finden, wenn der Halbmesser = 1 gesetzt wird.

Auflös. Die Seite des in den Kreis beschriebenen Achtecks ist $= \sqrt{2 - \sqrt{2}}$, und die Seite des um den Kreis beschriebenen ist nach (§ 117.) $= 2\,(\sqrt{2} - 1)$.

Der Umfang des inneren Achtecks ist $= 8\sqrt{2 - \sqrt{2}} = 6{,}12296$, und der Flächeninhalt desselben $= 2\sqrt{2 - \sqrt{2}} \,.\, \sqrt{2 + \sqrt{2}} = 2\sqrt{2} = 2{,}828426\ldots$

Der Umfang des äußeren Achtecks ist $= 8 \,.\, 2\,(\sqrt{2} - 1) = 6{,}627408$, und der Flächeninhalt $= 8\,(\sqrt{2} - 1) = 3{,}3137\ldots$

Anmerk. Es ist nämlich im inneren Achteck die Höhe eines seiner Dreiecke $= \sqrt{2 + \sqrt{2}} : 2$.

Die Seite des in den Kreis beschriebenen Sechszehnecks ist $= \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$, also der Umfang desselben $= 16\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$, und der Flächeninhalt $= 16\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}} \cdot \frac{1}{4}\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$ $= 4\sqrt{2 - \sqrt{2}}$.

Die Seite des um den Kreis beschriebenen Sechszehnecks

$$\text{ist} = 2\sqrt{\frac{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}} = \frac{2\,(2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}})}{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}$$

$$= \frac{2\,(2\sqrt{2 - \sqrt{2}} - \sqrt{2})}{2 - \sqrt{2}}$$

$$= (2\sqrt{2 - \sqrt{2}} - \sqrt{2})\,(2 + \sqrt{2}),$$

also der Umfang desselben $= 16\,(2\sqrt{2 - \sqrt{2}} - \sqrt{2})\,(2 + \sqrt{2})$, und sein Flächeninhalt $= 8\,(2\sqrt{2 - \sqrt{2}} - \sqrt{2})\,(2 + \sqrt{2})$.

2) Wie verhält sich der Umfang eines Quadrats zu dem eines Kreises, wenn beide Figuren gleichen Flächeninhalt haben?

Auflös. Man setze den Flächeninhalt sowohl des Quadrats als des Kreises $= a$, so ist eine Seite des Quadrats $= \sqrt{a}$, und dessen Umfang $= 4\sqrt{a}$; ferner ist der Umfang des Kreises $= 2\sqrt{a\,\pi}$ (§ 12.), also $4\sqrt{a} : 2\sqrt{a\,\pi} = 2\sqrt{a} : \sqrt{a\,\pi}$, oder durch Division des hinteren Verhältnisses mit $\sqrt{2}$,

$$4\sqrt{a} : 2\sqrt{a\,\pi} = 2 : \sqrt{\pi} = 2 : \sqrt{3{,}14}.$$

Der Umfang des Quadrats verhält sich also zum Umfang des Kreises wie 2 zur Quadratwurzel aus der Ludolph'schen Zahl oder wie 2 zu 1,772...

3) Wie verhält sich der Umfang des Quadrats zu dem des gleichseitigen Dreiecks, wenn beide gleichen Flächeninhalt haben?

Antwort. Wie 2 zu $3\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{3}}$, d. i. wie 2 zu 2,2794..

4) Wie verhält sich der Flächeninhalt eines Quadrats zu dem eines Kreises, wenn beide Figuren gleichen Umfang haben?

Auflös. Es sei der Flächeninhalt des Quadrats = b, und des Kreises = a, dann der Umfang einer jeden Figur = p, so ist eine Seite des Quadrats = p : 4, folglich sein Quadratinhalt $b = p^2 : 16$, und der Quadratinhalt des Kreises, auch in p ausgedrückt,

ist $a = p^2 : 4\pi$ (Seite 79, Formel 7). Daher

$$b : a = \frac{p^2}{16} : \frac{p^2}{4\pi} = \frac{1}{4} : \frac{1}{\pi}, \text{ oder}$$

$$b : a = \frac{\pi}{4} : 1,$$

d. i. der Flächeninhalt eines Quadrats verhält sich zu dem eines Kreises von gleichem Umfange, wie der vierte Theil der Ludolph'schen Zahl zur Einheit, oder wie 0,78539... zu 1.

5) Wie verhält sich aber ein Quadrat zu einem gleichseitigen Dreieck, wenn beide einem gleich großen Umfang haben?

Antwort: Wie 1 zu $\frac{4}{9}\sqrt{3}$.

Zusatz. Die höhere Geometrie lehrt, daß unter allen Figuren von gleichem Umfang der Kreis den größten Flächeninhalt in sich einschließt.

6) Es ist ein Quadrat und ein gleichseitiges Dreieck in einem Kreise beschrieben; wie verhalten sich beide Figuren ihrem Flächeninhalte und Umfange nach zu einander?

Auflös. Der Inhalt des Quadrats ist $= 2r^2$ und des Dreiecks $= \frac{3}{4}r^2\sqrt{3}$, also ist ihr Verhältniß 2 zu $\frac{3}{4}\sqrt{3}$, oder 1 zu 0,6495...

Eine Seite des Quadrats ist $= r\sqrt{2}$, also sein Umfang $= 4r\sqrt{2}$; eine Seite des Dreiecks ist $= r\sqrt{3}$, also sein Umfang $= 3r\sqrt{3}$; daher verhalten sich beide Umfänge wie $4\sqrt{2}$ zu $3\sqrt{3}$, oder wie 1 zu 0,91854..

7) Wie verhalten sich aber beide Figuren, wenn sie **um** den Kreis beschrieben sind?

Auflös. Der Inhalt des Quadrats ist $= 4r^2$ und des Dreiecks $= 3r^2\sqrt{3}$, also das Verhältniß 4 zu $3\sqrt{3}$, oder 1 zu 1,299, also das Dreieck größer.

Der Umfang des Quadrats ist $= 8r$ und des Dreiecks $= 6r\sqrt{3}$, mithin verhält sich der Umfang des Quadrats zu dem des Dreiecks wie 4 zu $3\sqrt{3}$, also mit vorhergehendem Verhältniß einerlei.

8) Wenn ein Achteck und ein Sechseck um denselben Kreis beschrieben sind, wie verhält sich das Achteck zum Sechseck seinem Umfange und Inhalte nach?

Der Umfang des Achteck ist $= 16(\sqrt{2} - 1)$ (Aufg. 1.); und der Umfang des Sechsecks = 6, also das Verhältniß beider Umfänge $8(\sqrt{2} - 1) : 3$, oder 3,313704 : 3.

Der Flächeninhalt des Achtecks ist $= 8(\sqrt{2} - 1)$, und des Sechsecks = 3, also dasselbe Verhältniß wie bei den Umfängen.

Es entsteht nun die Frage, ob auch im 16eck und 12eck; dann im 32eck und 24eck u. s. f. ein solches Verhältniß statt finde.

Zu Beantwortung dieser Frage sei allgemein die Seite des um den Kreis beschriebenen (regelmäßigen) necks $= a$, sein Umfang $= p$, und Quadratinhalt $= q$, so ist, wenn r den Radius bedeutet

1) $p = an$; 2) $q = an . \frac{1}{2} r$ (§ 115, Zus. 4).

Dann sei die Seite des um denselben Kreis beschriebenen mecks $= b$, sein Umfang $= p'$ und Quadratinhalt $= q'$, so ist

3) $p' = bm$. 4) $q' = bm . \frac{1}{2} r$.

Aus 1 und 3 folgt 5) $p : p' = an : bm$
und aus (2) und (4) $q : q' = an . \frac{1}{2} r : bm . \frac{1}{2} r$,
oder durch Division des hinteren Verhältnisses mit $\frac{1}{2} r$.

6) $q : q' = an : bm$.

Endlich geht aus (5) und (6) hervor

$$p : p' = q : q'.$$

Also zwei auch mehrere um denselben Kreis beschriebene regelmäßigen Vielecke, so groß, und so verschieden auch die Anzahl ihrer Seiten sein mag, verhalten sich ihrem Umfange nach eben so zu einander wie ihrem Quadratinhalte nach.

9) Ein gegebenes Quadrat in ein Rechteck zu verwandeln, dessen anstoßende Seiten ein bestimmtes Verhältniß, etwa 2 zu 3 zu einander haben.

Auflösung. Man nehme eine beliebige Linie als Durchmesser, z. B. fg (Fig. 120, S. 67.), und beschreibe den Halbkreis; alsdann theile man diesen Durchmesser nach dem Verhältniß 2 zu 3 (§ 78, Aufg. 2), und errichte, wenn z. B. h der Theilungspunkt wäre, aus demselben eine Senkrechte hi bis an die Peripherie; ferner suche man zu dieser Senkrechten, zu der Seite des gegebenen Quadrats und zu dem angenommenen Durchmesser fg die vierte Proportionale, theile diese wieder nach dem Verhältniß 2 zu 3, so geben beide Theile die Seiten des verlangten Rechtecks.

Beweis. Es sei das gegebene Quadrat $= a$, also seine Seite $= \sqrt{a}$, und $fg = b$. Wird nun b nach dem Verhältniß 2 zu 3 getheilt, so werden die Theile folgende: $\frac{2}{5} b$ und $\frac{3}{5} b$, also ist $\frac{2}{5} b : hi = ki : \frac{3}{5} b$, daher

$hi = \frac{b\sqrt{6}}{5}$, also $\frac{b\sqrt{6}}{5} : \sqrt{a} = b : x$, wo x die verlangte vierte Proportionale bezeichnet; folglich $x = b\sqrt{a} : \frac{b\sqrt{6}}{5}$

$= \frac{5\sqrt{6a}}{6}$.

Theilt man nun den so eben erhaltenen Werth von x nach dem Verhältniß 2 zu 3, so erhält man die Theile $\frac{2}{6}\sqrt{6a}$ und $\frac{3}{6}\sqrt{6a}$: denn es ist in der That die mittlere Proportionale beider Theile $= \frac{2}{6}\sqrt{6a} . \frac{3}{6}\sqrt{6a} = \frac{1}{6}\, 6a = a$, also dem gegebenen Quadrate gleich.

10) Ein gegebenes Quadrat, dessen Seite $= \sqrt{a}$ sei, in ein gleichseitiges Dreieck zu verwandeln.

Auflös. Man construire ein beliebiges gleichseitiges Dreieck, suche zwischen der halben Seite und der Höhe desselben die mittlere geometrische

Proportionale, so ist deren Quadrat einem Rechtecke aus der halben Seite des Dreiecks mit dessen Höhe, also dem Dreiecke selbst gleich.

Ferner suche man zu eben dieser mittleren Proportionale, zur Seite des gegebenen Quadrats und zur Seite des angenommenen Dreiecks die vierte Proportionale; und diese ist die gesuchte Seite des neuen Dreiecks.

Beweis. Es sei b die Seite und h die Höhe des angenommenen Dreiecks, so ist $\sqrt{\frac{1}{2} b.h}$ die gesuchte mittlere Proportionale.

Ferner ist, wenn x die Seite des neuen Dreiecks bezeichnet,

$$\sqrt{\tfrac{1}{2} b.h} : \sqrt{a} = b : x, \text{ also}$$

$$x = b \sqrt{a} : \sqrt{\tfrac{1}{2} b h} = b \sqrt{\frac{2a}{bh}}.$$

Denn es ist nach (§ 104, Aufg. 10.), wo x die Seite eines gleichseitigen Dreiecks bedeutet, der Flächeninhalt

$$\text{desselben} = \frac{x^2 \sqrt{3}}{4}, \text{ also}$$

$$\frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = b^2 \cdot \frac{2a}{bh} \sqrt{3} : 4 = \frac{a b^2 \sqrt{3}}{2bh} = \frac{ab\sqrt{3}}{2h}.$$

Nun ist $h = \frac{b\sqrt{3}}{2}$, folglich, wenn dieser Werth statt h gesetzt wird,

$$\frac{x^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{ab\sqrt{3}}{2} : \tfrac{1}{2} b \sqrt{3} = a, \text{ also obigem Quadrate gleich.}$$

Anmerkung. Die beiden letzten Aufgaben lassen sich noch auf andere Art auflösen, welches hier nicht gezeigt werden kann.

11) Aus der Seite des regelmäßigen Zehnecks die Seite des regelmäßigen Fünfecks zu finden.

Auflös. Es ist (Fig. 138, Seite 82.) b die Seite des regelmäßigen Zehnecks, und es findet dort (§ 128.) die Proportion statt: $bf : fa = fa : ab$, oder wegen $fa = fd = bd$ und $bf = ab - bd$, $(ab - bd : bd = bd : ab$.

Es sei nun $ab = r$, $bd = a$, so ist demnach

$$(r - a) : a = a : r, \text{ also } r^2 - ar = a^2.$$

Woraus folgt 1) $a = -\frac{1}{2} r + \frac{1}{2} r \sqrt{5} = \frac{1}{2} r (-1 + \sqrt{5})$, als die Seite des Zehnecks.

Man ziehe ferner die Sehne des doppelten Winkels oder die Seite des regelmäßigen Fünfecks und bezeichne sie mit b, d. h. wenn z. B. (Fig. 135, Seite 75.) ae die Seite des Zehnecks wäre, so würde ab = b sein. Es sei nun cd = h (dieselbe Figur), so ist

$$2)\ \tfrac{1}{2} b = \sqrt{r^2 - h^2} \text{ und auch } \tfrac{1}{2} b = \sqrt{a^2 - (r - h)^2};$$

$$\text{daher } \sqrt{r^2 - h^2} = \sqrt{a^2 - (r-h)^2},$$

$$\text{oder } r^2 - h^2 = a^2 - (r - h)^2 = a^2 - r^2 + 2rh - h^2,$$

$$\text{woraus folgt } h = \frac{2r^2 - a^2}{2r}.$$

Nun ist aus (1) $a^2 = \frac{1}{4} r^2 (6 - 2\sqrt{5}) = \frac{1}{2} r^2 (3 - \sqrt{5})$, und setzt man diesen Werth statt a^2 in vorhergehende Gleichung, so ist

$$h = \frac{2 r^2 - \frac{3}{2} r^2 + \frac{1}{2} r^2 \sqrt{5}}{2 r} = \frac{r (1 + \sqrt{5})}{4},$$ und

$$h^2 = \frac{r^2 (6 + 2\sqrt{5})}{16} = \frac{r^2 (3 + \sqrt{5})}{8};$$ und die Einsetzung dieses Werthes in (2) giebt $\frac{1}{2} b = \sqrt{r^2 - \frac{r^2 (3 + \sqrt{5})}{8}}$

$= \frac{1}{2} r \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}}$, endlich $b = r \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}}$ (vgl. § 128).

12) Aus den gegebenen drei Seiten eines beliebigen Dreiecks seine Höhe und die Abschnitte der Grundlinie zu finden.

Auflös. Man nehme eine beliebige Seite $b c$ als Grundlinie an und bezeichne sie mit a (Fig. 78, Seite 39.), dann sei $a c = b$, $a b = c$, die Höhe $a d = x$ und der Abschnitt $b d = y$, so ist der andere $d e = a - y$;

also ist $x^2 = c^2 - y^2$, und auch $x^2 = b^2 - (a - y)^2 = b^2 - a^2 + 2 a y - y^2$.

Die Gleichsetzung beider Werthe von x^2 giebt

$$c^2 - y^2 = b^2 - a^2 + 2 a y - y^2$$

oder, da auf beiden Seiten y^2 sich hebt, $c^2 = b^2 - a^2 + 2 a y$, woraus folgt

$$y = \frac{c^2 - b^2 + a^2}{2 a}$$ als der eine Abschnitt

und $a - y = a - \frac{(c^2 - b^2 + a^2)}{2 a} = \frac{a^2 - c^2 + b^2}{2 a}$

als der andere Abschnitt.

Um die Höhe x zu finden, setze man den Werth von y in obige Gleichung $x^2 = c^2 - y^2$, wodurch man erhält

$$x^2 = c^2 - \left(\frac{c^2 - b^2 + a^2}{2 a}\right)^2$$

$$= c^2 - \frac{(c^4 + b^4 + a^4 - 2 b^2 c^2 + 2 a^2 c^2 - 2 a^2 b^2)}{4 a^2};$$

also $$x^2 = \frac{4 a^2 c^2 - c^4 - b^4 - a^4 + 2 b^2 c^2 - 2 a^2 c^2 + 2 a^2 b^2}{4 a^2}$$

$$= \frac{2 b^2 c^2 + 2 a^2 c^2 + 2 a^2 b^2 - c^4 - b^4 - a^4}{4 a^2}.$$

Der Zähler des Ausdrucks rechter Hand läßt sich nun in folgende Factoren zerlegen:

$a + b + c$, $b + c - a$, $c + a - b$, $a + b - c$; also

ist $x = \frac{1}{2a} \sqrt{} [(a + b + c)(b + c - a)(c + a - b)(a + b - c)]$.

Setzt man die halbe Summe aller drei Seiten, nämlich $\frac{a + b + c}{2} = s$, so ist $a + b + c = 2s$, $b + c - a = 2(s - a)$, $c + a - b = 2(s - b$, $a + b - c = 2(s - c)$;

folglich $x = \frac{2}{a} \sqrt{} [s(s - a)(s - b) s - c)]$.

Für $a = 15$, $b = 14$, $c = 13$ erhält man $x = 11\frac{1}{5}$.

13) Aus den drei Seiten a, b, c eines Dreiecks seinen Flächeninhalt zu finden.

Auflös. Bezeichnet man wieder wie in vorhergehender Aufgabe die Grundlinie mit a und die Höhe mit x, so drückt $\frac{1}{2} a x$ den Flächeninhalt des Dreiecks aus.

Setzt man nun in dem Ausdrucke $\frac{1}{2} a x$ statt x seinen zuletzt hergeleiteten Werth aus voriger Aufgabe, so ist der Flächeninhalt des Dreieck, welcher A heißen mag

$$A = \sqrt{} [s(s - a)(s - b)(s - c)].$$

Es sei $a = 10$, $b = 8$, $c = 6$ Fuß, so ist $s = 12$, $s - a = 2$, $s - b = 4$, $s - c = 6$, also

$$A = \sqrt{} 12.2.4.6 = 24 \text{ Quadratfuß}.$$

14) Es ist der Flächeninhalt und der Umfang eines rechtwinkeligen Dreiecks gegeben, man soll die drei Seiten desselben finden.

Auflös. Es sei der Flächeninhalt $= A$, der Umfang $= p$, die eine Kathete $= x$, die andere $= y$, so ist die Hypotenuse $= \sqrt{x^2 + y^2}$; folglich ist

$$1)\ \frac{xy}{2} = A;\ 2)\ x + y + \sqrt{x^2 + y^2} = p.$$

Aus (2) folgt

$$3)\ \sqrt{x^2 + y^2} = p - x - y.$$

Die Erhebung beider Seiten zum Quadrat giebt

$$x^2 + y^2 = p^2 + x^2 + y^2 - 2px - 2py + 2xy,$$

oder $0 = p^2 - 2px - 2py + 2xy$,

woraus folgt $4)\ x + y - \frac{xy}{p} = \frac{1}{2} p$.

Nun ist aus (1) $y = \frac{2A}{x}$; setzt man diesen Werth in nächst vorhergehende Gleichung ein, so ergiebt sich

$$5)\ x + \frac{2A}{x} - \frac{2A}{p} = \tfrac{1}{2} p;$$

und nach gehöriger Einrichtung zur Bestimmung von x

$$x^2 - \frac{(4A + p^2)x}{2p} = -2A.$$

Daraus folgt endlich nach gehöriger Abkürzung

$$6)\ x = \frac{1}{4p}(4A + p^2 + \sqrt{16A^2 - 24Ap^2 + p^4})$$

Aus 4) erhält man $y = \frac{1}{2} p + \frac{xy}{p} - x.$

Setzt man nun in dem Gliede $\frac{xy}{p}$ statt y den Werth $\frac{2A}{x}$ aus (1), so ergiebt sich

$$y = \tfrac{1}{2} p + \frac{2A}{p} - x, \text{ folglich}$$

$$y = \frac{1}{4p}(4A + p^2 - \sqrt{16A^2 - 24Ap^2 + p^4})$$

Aus 3) findet man die Hypotenuse

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{p^2 - 4A}{2p}.$$

15) Zwei parallele Sehnen eines Kreises nebst ihrem Abstande von einander sind gegeben; man soll daraus den Halbmesser bestimmen.

Auflös. Es sei die größere Sehne $= 2a$, die kleinere $= 2b$, der Halbmesser $= x$, und das Stück des Halbmessers, welches von der kleineren Sehne bis zur Peripherie geht, $= y$, so ist

$x^2 = a^2 + y^2$, und auch $x^2 = b^2 + (c+y)^2 = b^2 + c^2 + 2cy + y^2$;

daher $a^2 + y^2 = b^2 + c^2 + 2cy + y^2$,

d. i. $a^2 = b^2 + c^2 + 2cy$; woraus folgt

$$y = \frac{a^2 - b^2 - c^2}{2c}$$

und $x^2 = a^2 + \left(\frac{a^2 - b^2 - c^2}{2c}\right)^2$; also $x = \frac{1}{2c}\sqrt{4a^2c^2 + (a^2 - b^2 - c^2)^2}$.

16) Aus der Hypotenuse und dem Inhalt eines rechtwinkeligen Dreiecks die Katheten zu finden.

Auflös. Es sei die Hypotenuse $= a$, der Inhalt $= A$, dann x und y die beiden Katheten, so ist $\frac{1}{2} xy = A$, also $2xy = 4A$; ferner $x^2 + y^2 = a^2$.

Die Addition der beiden letzten Gleichungen giebt

$2xy + x^2 + y^2 = 4A + a^2$ oder $(x + y)^2 = 4A + a^2$,

also 1) $x + y = \sqrt{a^2 + 4A}$

und durch Subtraction derselben erhält man 2) $x - y = \sqrt{a^2 - 4A}$.

Addirt man nun die Gleichungen 1, und 2, das eine Mal und subtrahirt sie das andere Mal von einander, so erhält man

$$x = \tfrac{1}{2}\,[\sqrt{a^2 + 4A} + \sqrt{a^2 - 4A}]$$

$$y = \tfrac{1}{2}\,[\sqrt{a^2 + 4A} - \sqrt{a^2 - 4A}].$$

Für $A = 6$ und $a = 5$ erhält man $x = 4$ und $y = 3$.

17) Eines rechtwinkeligen Dreiecks Umfang und Höhe sind gegeben, man soll die Hypotenuse finden.

Zur Höhe ist hier der Abstand zwischen der Spitze des rechten Winkels und der Hypotenuse angenommen.

Auflös. Es sei die Hypotenuse $= x$, der Umfang $= p$ und die Höhe $= h$, so ist die Summe der beiden Katheten $= p - x$; dann sei der Unterschied der beiden Katheten $= y$.

Es kommt nun noch darauf an, jede Kathete selbst zu bestimmen.

Zu dem Ende erinnere man sich, daß aus arithmetischen Gründen zwei unbekannte Zahlen gefunden werden können, wenn ihre Summe und ihre Differenz gegeben sind: nämlich die halbe Summe und die halbe Differenz zusammen geben die größere und der Abzug der halben Differenz von der halben Summe die kleinere Zahl.

Es ist also hier $\frac{p - x + y}{2}$ die größere und $\frac{p - x - y}{2}$ die kleinere Kathete.

Also ist $x^2 = \left(\frac{p - x + y}{2}\right)^2 + \left(\frac{p - x - y}{2}\right)^2$.

Die Ausführung der Rechnung giebt

$$y^2 = x^2 + 2px - p^2.$$

Nun ist der Flächeninhalt des Dreiecks $= \tfrac{1}{2}hx$, und auch

$$= \left(\frac{p - x + y}{2}\right) \cdot \left(\frac{p - x - y}{2}\right) \cdot \tfrac{1}{2};$$

daher ist $hx = \tfrac{1}{4}(p - x + y)(p - x + y)$.

Nach gehöriger Entwickelung erhält man

$$y^2 = x^2 - 2px + p^2 - 4hx.$$

Man verbinde diese Gleichung mit der vorhergehenden, so ist

$$x^2 - 2px + p^2 - 4hx = x^2 + 2px - p^2$$

oder $-2px + p^2 - 4hx = \ldots\ldots 2px - p^2$,

daraus folgt $x = \frac{p^2}{2(p + h)}$.

Zweiter Theil.

Die Stereometrie oder die Ausmessung der Körper.

§ 132. Erklärung. Die Stereometrie begreift nicht blos die Betrachtung der Körper in sich, sondern auch alle andere geometrischen Gegenstände der Flächen, Linien und Punkte in so fern sie nicht auf eine einzige Ebene eingeschränkt sind, oder in einerlei Ebenen liegen. Daher sind ihre Lehren zusammengesetzter und für den Anfänger schwieriger als die der Planimetrie.

Erster Abschnitt.

Lage der Ebenen.

I. Linien, die auf einer Ebene perpendikular sind; parallele und perpendikulare Ebenen.

§ 133. Erklärung. Eine Ebene durch eine Linie legen, heißt sie so legen, daß die Linie ganz in sie hineinfällt.

§ 134. Grundsatz. Durch jede gerade Linie, durch jede zwei Parallellinien, durch jeden Winkel, jedes Dreieck läßt sich eine Ebene legen, weil diese Gegenstände selbst in einer Ebene liegen.

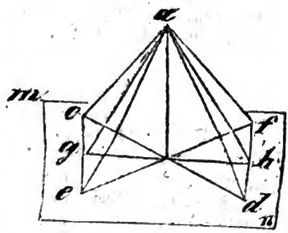
Zusatz 1. Durch jede drei Punkte, die nicht zusammen in einer geraden Linie sind, wird die Lage einer Ebene bestimmt.

Durch zwei Punkte, oder durch eine gerade Linie ist aber die Lage der Ebene noch nicht bestimmt, weil sich sowohl durch zwei Punkte als durch eine Linie unzählig viele Ebenen legen lassen. Denn die Ebene läßt sich um die Linie wie um eine Achse drehen.

Zusatz 2. Jede gerade Linie, die zwei Parallellinien schneidet, ist mit ihnen in einer Ebene.

Zusatz 3. Der Durchschnitt zweier Ebenen ist eine gerade Linie. Denn wäre er eine krumme Linie, so könnte man in ihm drei Punkte annehmen, die nicht in gerader Linie lägen, und durch diese gingen zwei Ebenen von verschiedener Lage, welches unmöglich ist.

Fig. 141.



§ 134. **Erklärung.** Eine gerade Linie a b ist auf einer Ebene m n senkrecht, wenn sie auf allen geraden Linien senkrecht ist, die in der Ebene durch den Durchschnittspunkt b gelegt werden können. Z. B. auf c d, e f, g h u. s. w. (Fig. 141).

§ 135. **Lehrsatz.** Ist eine gerade Linie a b auf zwei in der Ebene m n sich schneidenden (geraden) Linie c d, e f, in ihrem Durchschnittspunkt b senkrecht, so ist sie auf der ganzen Ebene senkrecht.

Beweis. Man mache c b = b d, e b = b f und ziehe c e aus f d, so ist

1) Dreieck e b c = d b f
folglich c e = d f.
Dann ist Winkel e c b = b d f.
Da nun auch Winkel e b g = d b h
und b c = b d ist,

so ist 2) Dreieck b g c = b d h.
Daher b g = b h. und c g = d h.

Man ziehe ferner a e, a e, und a f, a h, a d, so ist
3) Dreieck a b e = a b d
und Dreieck a b e = a b f.

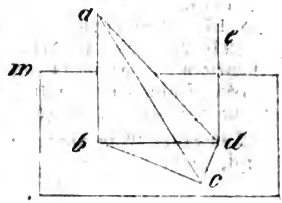
Und zwar sind diese Dreiecke vermöge der Construction alle rechtwinkelig.

Folglich a c = a d und a e = a f.
Nun wird aber auch aus (1) c e = d f.
Daher 4) Dreieck a c e = a d f
also auch Winkel a c g = a d h.
Da nun aus (3) a c = a d
und aus (2) c g = d h ist,
so ist 5) Dreieck a g c = a h d, folglich a g = a h
und da aus (2) b g = b h, und a b = a b ist,
so folgt endlich 6) Dreieck a b g = a b h;
daher auch Winkel a b g = a b h, und folglich ein jeder = 1 R (§ 43, Aufg. 3.); folglich ist a b senkrecht auf g h. Da nun dieses eben so von jeder anderen Linie, wie g h, bewiesen werden kann, so ist a b auf allen Linien, die in der Ebene durch b gelegt werden können, folglich auf der ganzen Ebene senkrecht.

§ 136. Voriger Satz gilt auch umgekehrt. Steht nämlich eine Linie a b in b auf drei anderen Linien b c, b g, b e senkrecht, so müssen diese Linien alle drei in einer Ebene liegen. Denn läge b g mit b c und b e nicht in derselben Ebene, so könnte man durch den Winkel a b g eine Ebene legen, welche die Ebene c b e in einer geraden Linie schneiden würde, und es würde also a b auf dieser Durchschnittslinie senkrecht stehen, während sie nach der Voraussetzung auch auf b g senkrecht ist, die mit der Durchschnittslinie in einer Ebene liegt, und es kann daher diese Durchschnittslinie von b g nicht verschieden sein.

Zusatz. Wenn man aus einem Punkte einer im Raum gegebenen geraden Linie mehrere Senkrechte auf derselben errichtet, so müssen diese sämmtlich in derselben Ebene liegen.

Fig. 142.



§ 137. Lehrsatz. Wenn auf einer und derselben Ebene zwei Linien senkrecht stehen, so laufen sie parallel.

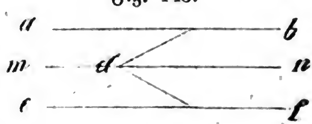
Beweis. Auf der Ebene des Winkels d b c (Fig. 142.) stehen die beiden Linien b a und d e senkrecht. Man errichte in der Ebene selbst auf b d eine Senkrechte c d, mache d c = a b und ziehe die Linien a d, a c und b c, so ist

Dreieck d b c = a b d
und daher a d = b c,
folglich ist Dreieck a c d = a b c
und daher Winkel a d c = a b c = R.

Es steht also c d auf a d senkrecht; vermöge der Construction ist aber auch c d senkrecht auf b d und nach der Voraussetzung auch auf d e, folglich liegen die drei Linien b d, a d und d e in einer Ebene, in welcher auch a b liegen muß. Da nun Winkel e d b = a b d = R, so sind a b und e d parallel.

Zusatz. Umgekehrt, wenn von zwei Parallellinien, a b und e d die eine a b senkrecht auf einer Ebene b d c steht, so muß auch die andere d e auf derselben Ebene senkrecht stehen.

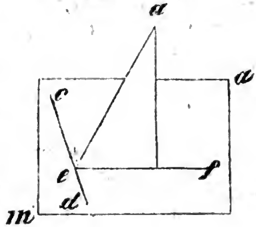
Fig. 143.



§ 138. Lehrsatz. Wenn zwei Linien a b und e f (Fig. 143.) mit einer dritten m n, die mit ihnen nicht in derselben Ebene liegt, parallel laufen, so sind diese Linien unter sich parallel.

Beweis. An irgend einem Punkte d der Linie m n errichte man die Senkrechte d c in der Ebene der Parallelen m n und a b, und die Senkrechte d g in der Ebene der Parallelen m n und e f, so ist nach (§ 134.) die Linie m n senkrecht auf der Ebene c d g. Da nun die Linien a b und e f mit m n parallel laufen, so sind nach (§ 137, Zus.) auch diese senkrecht auf derselben Ebene und laufen folglich parallel.

Fig. 144.



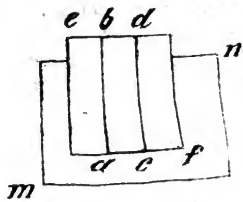
§ 139. Aufgabe. Auf eine gegebene Ebene m n, aus einem außer ihr gegebenen Punkte a, ein Perpendikel zu fällen (Fig. 144).

Auflös. Man ziehe in der Ebene m n eine beliebige Linie c d; durch a c d denke man sich eine andere Ebene gelegt, und in derselben sei a e senkrecht auf c d; ferner sei e f in der Ebene m n senkrecht auf c d; dann werde durch a e f eine Ebene gelegt, und in dieser a b senkrecht auf e f gezogen, so ist diese das verlangte Perpendikel.

Beweis. Da c d auf a e und e f senkrecht ist, so ist sie auf der Ebene durch a e f senkrecht; folglich ist auch m n auf der Ebene durch a e f senkrecht (§ 135). Da nun a b auf e f, als der Durchschnittslinie beider Ebenen, senkrecht ist, so steht sie auf der ganzen Ebene senkrecht.

Zusatz. Von ein Punkt a außerhalb einer Ebene ist nur eine einzige Senkrechte auf diese Ebene möglich.

Fig. 145.

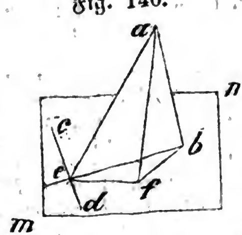


§ 140. Aufg. Aus einem gegebenen Punkt a in der Ebene m n ein Perpendikel auf die Ebene zu errichten (Fig. 145).

Auflös. Man nehme einen beliebigen Punkt d außerhalb der Ebene an, fälle von diesem eine Senkrechte d c auf m n, lege durch d c a eine Ebene e f und ziehe in dieser a b parallel zu d c, so ist a b das verlangte Perpendikel.

Der Beweis geht aus (§ 135.) hervor.

Fig. 146.



1 141. Erklärung. Die Neigung einer geraden Linie a e gegen eine Ebene m n (Fig. 146.) ist der spitze Winkel a e b, den sie mit der Linie e b macht, welche die Punkte e, b verbindet, in deren einem sie selbst, in dem anderen aber das von einem ihrer Punkte auf die Ebene m n gefällte Perpendikel a b die Ebene trifft.

§ 142. Lehrsatz. Der Neigungswinkel a e b der Linie a e gegen die Ebene m n ist unter allen Winkeln, welche die Linie a e mit denen von e aus in derselben Ebene gezogenen Linien macht, der kleinste (Fig. 146).

Beweis. Man ziehe irgend eine andere Linie e f, mache e f = e b, und ziehe b f und a f, so ist a b f ein rechtwinkeliges Dreieck und der rechte Winkel bei b (weil Dreieck e b f in der Ebene m n liegt und a b senkrecht auf derselben ist) und a f die Hypotenuse;

folglich a f > a b.
Da nun e f = e b
und a e = a e ist,

so ist Winkel a e f > a e b.

Ein jeder Winkel also, wie a e f, ist größer als a e b; folglich ist dieser als der Neigungswinkel der kleinste unter allen Winkeln, die a e mit den Linien in der Ebene m n macht.

Zusatz. Da a e b der kleinste unter allen erwähnten Winkeln ist, so ist der Winkel a e g, den a e mit der verlängerten b e macht, der größte unter allen, weil er der Nebenwinkel des kleinsten ist.

§ 143. Aufg. Den Neigungswinkel a e b der Linie a e gegen die Ebene m n zu finden (Fig. 146).

Auflös. Man fälle von irgend einem Punkt a der Linie a e eine Senkrechte a b auf m n und ziehe e b, so ist a e b der gesuchte Neigungswinkel.

Der Beweis erhellet aus (§ 142).

§ 144. Lehrsatz. Wenn eine Linie auf zwei verschiedenen Ebenen senkrecht steht, so müssen diese Ebenen parallel laufen.

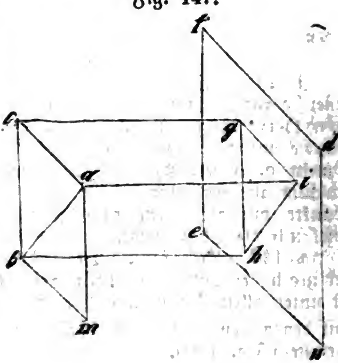
Beweis. Gesetzt diese Ebenen liefen nicht parallel, so hätten sie eine gemeinschaftliche Durchschnittslinie, und man könnte irgend einen Punkt derselben mit den Durchschnittspunkten der Senkrechten verbinden, wodurch ein Dreieck mit zwei rechten Winkeln entstehen würde, welches unmöglich ist.

Zusatz. Zwei parallele Ebenen müssen überall gleich weit von einander abstehen.

§ 145. Wenn die Schenkel zweier Winkel a c b und d f e, die in verschiedenen Ebenen c m und f n liegen, parallel laufen, so sind diese Ebenen selbst parallel (Fig. 147).

Beweis. Man fälle von dem Scheitel c des Winkels a c b eine Senkrechte c g auf die Ebene des Winkels d f e und ziehe in derselben durch g die Linien g i und g h parallel mit d f und f e, so ist nach (§ 138.) die Linie g i parallel mit c a und g h parallel mit c b.

Fig. 147.



Da nun Winkel c g i = R und Winkel c g h = R,
so ist auch Winkel g c a = R und Winkel g c b = R.

Die Linie c g steht also senkrecht auf der Ebene des Winkels a c b. Sie ist aber vermöge der Construction auch senkrecht auf d f e, folglich sind nach (§ 141.) die Ebenen parallel.

§ 146. Wenn die Schenkel zweier in verschiedenen Ebenen liegenden Winkel parallel laufen, d. h. wenn d f zu a c und e f zu b c parallel ist (Fig. 147.) so sind diese Winkel gleich groß.

Beweis. Man nehme an, es sei g i = c a, g h = a m und ziehe die Linien c g, a i, b h, a b, h i, so sind die Linien c g, a i und b h gleich groß und parallel, folglich ist auch a b = h i, und es ist daher Dreieck a c b = i g h, also auch Winkel a c b = i g h, welches zu erweisen war.

§ 147. Lehrsatz. Wenn eine Linie mit einer Ebene parallel läuft, und man legt durch diese Linie eine Ebene, so daß von ihr erstere Ebene geschnitten wird, so ist die Durchschnittslinie parallel mit genannter Linie.

Beweis. Gesetzt die Durchschnittslinie wäre nicht mit jener Linie parallel, so würden sich beide Linien in genugsamer Verlängerung schneiden müssen, was nicht sein kann.

Zusatz 1. Wenn durch eine, mit einer Ebene parallel laufende Linie zwei verschiedene Ebenen gelegt werden so, daß beide die erstere Ebene schneiden, so sind die beiden Durchschnittslinien einander parallel.

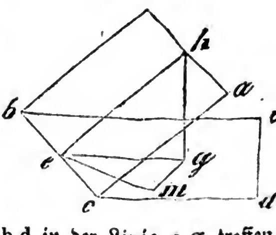
Zusatz 2. Wenn zwei Linien parallel laufen, und man legt durch eine derselben eine Ebene, so liegt entweder auch die andere Linie in dieser Ebene oder sie ist, in so fern sie nicht in ihr liegt, mit derselben parallel. Denn würde die Ebene von der zweiten Linie blos geschnitten, so könnte sie mit der ersten Linie nicht in derselben Ebene liegen, und also auch mit ihr nicht parallel laufen.

Zusatz 3. Wenn zwei parallele Ebenen von einer dritten geschnitten werden, so sind die Durchschnittslinien parallel.

Zusatz 4. Wenn eine Linie senkrecht auf einer Ebene steht, so ist auch jede Ebene, welche durch diese Linie gelegt wird, senkrecht auf jener Ebene.

§ 148. Lehrsatz. Wenn zwei Ebenen b a und b d (Fig. 148.) in der Linie b c sich schneiden, und man zieht aus irgend einem Punkte e der gemeinschaftlichen Durchschnittslinie b c die Senkrechte h e in der Ebene a b, und die Senkrechte e g in der Ebene b d, so ist nach (§ 141.) der Winkel h e g der Neigungswinkel beider Ebenen. Daher muß nach (§ 143.), wenn man von einem beliebigen Punkte h der Linie e h eine Senkrechte h g fällt, diese die Ebene b d in der Linie e g treffen.

Fig. 148.



Hieraus aber läßt sich darthun, daß der Winkel h e g, also der Neigungswinkel beider Ebenen, kleiner ist als jeder Winkel, welcher eine andere in der Ebene b d gezogene Linie e m mit e h bildet. Denn man mache e m = e g und ziehe h m, und vergleiche § 142.

Zusatz 1. Dreht sich die Linie e h in der Ebene a b um den Punkt e nach b oder c hin, so wird der spitze Winkel h e g immer größer und ist am größten, wenn e h in e b oder in e c fällt, und dann einem rechten gleich.

Zusatz 2. Verlängert man g e nach der entgegengesetzten Seite, k, hin, so ist Winkel h e k der Nebenwinkel von h e g und ein stumpfer. Dieser wird durch dieselbe Drehung der Linie e h um den Punkt e im Gegentheil immer kleiner und ist am kleinsten, wenn e h in e b oder in e c fällt und dann ebenfalls einem rechten Winkel gleich.

Von den Ecken und körperlichen Winkeln.

§ 149. Erklärung. Wenn mehr als zwei gerade Linien, von denen nicht mehr als je zwei in derselben Ebene liegen, in einem Punkte zusammentreffen, so bilden sie einen körperlichen Winkel oder eine Ecke.

Der körperliche Winkel besteht aus ebenen Winkeln, und zwar aus eben so vielen, als sich Linien zur Bildung mit körperlichen Winkeln in diesem Punkte vereinigen.

Dieser Punkt heißt, so wie bei dem ebenen Winkel, der Scheitel des körperlichen Winkels.

Zu einem körperlichen Winkel werden wenigstens drei ebene erfordert.

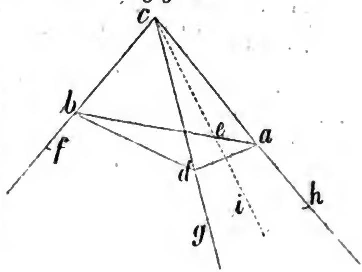
Bemerkung und Erläuterung. Ein ebener Winkel ist ein solcher, der aus zwei geraden Linien gebildet wird; also sind alle die Winkel, welche in der Planimetrie vorkommen, ebene.

Hingegen ein Winkel, der von zwei Ebenen gebildet wird, wie in (Figur 148.), heißt ein Flächen- oder Ebenenwinkel. Ein körperlicher Winkel besteht daher aus ebenen und Flächenwinkeln.

Man unterscheide ferner zwischen Ecke und Kante. Eine Ecke ist nichts anderes als der äußerste (erhabene) spitze Theil des körperlichen Winkels; eine Kante hingegen ist der äußerste (erhabene) scharfe Theil, welchen zwei Flächenwinkel bilden.

§ 150. Lehrsatz. Wenn ein körperlicher Winkel aus drei ebenen besteht, so sind jede zwei derselben größer als der dritte.

Fig. 149.



Beweis. Es sei (Fig. 149.) c der Scheitel des körperlichen Winkels, der von den drei ebenen Winkeln b c d, d c a und b c a gebildet wird. — Die Länge der Schenkel der ebenen Winkel hat auf die Größe des körperlichen Winkels, so wie bei dem ebenen Winkel, keinen Einfluß; sie können daher beliebig groß sein.

Sind nun diese drei Winkel einander gleich, so ist der Satz an und für sich klar; sind sie aber ungleich, so sei Winkel b c a größer als jeder der beiden anderen.

Man mache einen Theil des Winkels f c h, nämlich f c i = f c g.

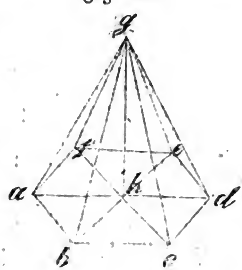
Auf c g nehme man aus c eine beliebige Länge c d, und mache c e = c d. Durch e ziehe man in willkürlicher Richtung a b, und d b aus d, so daß a b und d b in b zusammenfallen, endlich ziehe man d a.

Alsdann ist Dreieck b c d ≅ b c e,
folglich b d = b c.
Nun ist b d + d a > b e + e a, d. i. b d + d a > b a,
und da b d = b e (wegen der Congruenz der Dreiecke),
so ist d a > e a,
und daher Winkel a d c > a c e, folglich auch
Winkel b c d + a c d > b c e + e c a,
d. i. Winkel b c d + a c d > a c b,

Man kann sich die Lage dieser körperlichen Ecke so vorstellen, daß, wenn das Dreieck b c a in der Ebene des Papiers liegt, die Ecke d über derselben erhaben ist und, wenn a b d in der Ebene des Papiers sich befindet, die Ecke c über derselben erhaben ist.

§ 151. Lehrsatz. Die Summe aller ebenen Winkel, die einen körperlichen bilden, so groß auch ihre Anzahl sein mag, ist kleiner als 4 rechte.

Fig. 150.



Beweis. Es sei (Fig. 150.) g ein körperlicher Winkel, der von 6 ebenen eingeschlossen ist, man durchschneide die Schenkel aller dieser Winkel durch eine Ebene, und ziehe zwischen den Durchschnittspunkten die Linien a b, b c u. s. w., so erhält man ein Sechseck a b c d e f.

In diesem nehme man einen beliebigen Punkt h und ziehe aus den Winkelpunkten a, b, c u. s. w. die Linien a h, b h u. s. w. Dadurch entstehen in dem Sechseck eben so viel Dreiecke a b h, b h c u. s. w. als nach dem körperlichen Winkel g hin gehen.

Daher ist die Summe der Winkel in dem Dreiecke des Sechsecks der Summe der Winkel in den Dreiecken, deren Spitzen in g liegen, gleich, weil die Winkelsumme eines jeden Dreiecks = 2 R ist.

Ferner bilden sich an den Punkten a, b, c u. s. w. lauter körperliche Winkel, deren jeder aus drei ebenen besteht: z. B. der körperliche Winkel bei a besteht aus den ebenen Winkeln g a f, g a b und f a b. Zwei dieser Winkel g a f und g a b gehören den Dreiecken, deren Spitzen in g liegen, und einer f a b den Dreiecken des Sechseckes an.

Nun ist Winkel g a f + g a b > f a b }
eben so g b a + g b c > a b c } (§ 150.) u. s. f.

Also auch in jedem der übrigen körperlichen Winkel c, d, e, f ist die Summe der beiden Winkel an der Grundlinie der Dreiecke, deren Spitzen in g liegen, größer als der daran stoßende Winkel der Dreiecke im Sechseck.

Folglich ist die Summe aller Winkel an der Grundlinie der Dreiecke, deren Spitzen in g liegen, größer als die Summe der daran stoßenden Winkel der Dreiecke im Sechseck.

Daher muß die Summe der Winkel um g kleiner als die Summe der Winkel um h sein; weil die Winkelsumme der Dreiecke im Raume gleich ist der Winkelsumme der Dreiecke im Sechseck.

Nun sind aber die Winkel um h = 4 R, folglich sind die Winkel um g kleiner als 4 rechte.

Von den regelmäßigen Körpern.

§ 152. Erklärung. Regelmäßige oder reguläre Körper heißen solche, die von lauter gleichen und regelmäßigen Vielecken eingeschlossen sind, und heißen Polyeder oder Vielflache. Es giebt 5 Arten derselben:

1) Das Tetraedrum, welches von 4 regelmäßigen oder gleichseitigen) gleichen Dreiecken; 2) das Hexaedrum, das von 6 gleichen Quadraten, wie der Würfel; 3) das Octaedrum, das von 8 gleichseitigen congruenten Dreiecken; 4) das Dodekaedrum, das von 12 regelmäßigen gleichen Fünfecken, und 5) das Ikosaedrum, das von 20 regelmäßigen gleichen Dreiecken eingeschlossen ist.

Es läßt sich nach (§ 151.) darthun, warum nicht mehr Arten solcher Körper möglich sind.

Betrachtet man nämlich 1) das regelmäßige Dreieck, so ist ein Winkel desselben, welcher zugleich der Polygonwinkel ist, = 60 Grad. Wird also der körperliche Winkel von drei solchen Ebenen Winkeln gebildet, so machen diese zusammen 180 Grad, dieß ist beim Tetraedum der Fall.

Vier solche Winkel machen 240°. Dergleichen enthält das Octaedrum.

Fünf solche Winkel betragen 300°, diese kommen im Ikosaedrum vor.

Sechs solche Winkel aber würden 360 = 4 R ausmachen, und ein solcher körperlicher Winkel ist nach (§ 151.) unmöglich.

Der Polygonwinkel des regelmäßigen Vierecks ist = 90.

Drei solche Winkel bilden den körperlichen Winkel des Hexaedrums.

Vier dergleichen betragen 4 R, und können also keinen körperlichen Winkel machen.

Der Polygonwinkel des regelmäßigen Fünfecks ist = 108 Grad.

Drei solche Winkel machen 324 Grad, dieß ist der körperliche Winkel des Dodekaedrums.

Vier solche Winkel würden mehr als 4 R betragen; daher können sie unmöglich einen körperlichen Winkel bilden.

Der Polygonwinkel des regelmäßigen Sechsecks ist = 120 Grad, daher machen drei derselben schon 360 Grad, also mehr als ein körperlicher Winkel enthalten kann, folglich kann kein regelmäßiger Körper durch das Sechseck gebildet werden, also noch weniger durch Polygone von mehr als 6 Seiten.

Anmerk. Von diesen regelmäßigen Körpern wird außer dem Hexaedrum oder dem Würfel kein besonderer Gebrauch in der Mathematik gemacht; übrigens findet man die Berechnung derselben weiter unten, wo von der Berechnung der Kugel die Rede ist.

Dritter Abschnitt.

Von den Körpern überhaupt.

I. Das Prisma.

§ 153. Erklärung. Prismatische Körper oder Prismen heißen Körper, die von zwei gleichen und parallelen Vielecken als Grundflächen, und von lauter Parallelogrammen als Seitenflächen eingeschlossen werden.

Zusatz 1. Die Entstehung eines Prisma kann man sich so erklären, daß ein Vieleck sich in gerader Linie, sich immer selbst parallel, fort bewege.

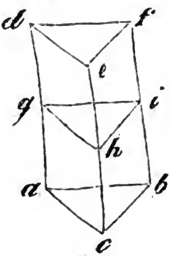
Zusatz 2. Die Prismen können in gerade (senkrechte) und schiefe eingetheilt werden, je nachdem die Seitenflächen auf den Grundflächen senkrecht oder schief stehen.

Zusatz 3. Die Prismen werden auch nach der Anzahl ihrer Seitenflächen in dreiseitige, vierseitige u. s. w. eingetheilt.

Zusatz 4. Sind die Grundflächen eines Prisma Parallelogramme, so sind die gegenüberstehenden Seitenflächen einander parallel, und das Prisma heißt ein Parallelepipedum auch Parallelepipedon (parallelseitiger Körper).

Zusatz 5. Sind die Grund- und Seitenflächen lauter Quadrate, so heißt das Parallelepipedum ein Würfel (Cubus).

Fig. 151.



§ 154. Lehrsatz. Wenn ein Prisma parallel mit der Grundfläche durchschnitten wird, so ist der Durchschnitt der Grundfläche gleich.

Beweis. Es sei das Prisma (Fig. 151.) in g h i parallel mit der Grundfläche durchschnitten, so ist g i parallel mit a b, folglich auch g i = a b. Eben so läßt sich darthun, daß g h = a c und h i = c b ist.

Ferner ist auch Winkel b a c = i g h, g h i = a c b und g i h = a b c; folglich ist der Durchschnitt g h i = a b c.

§ 155. Lehrsatz. Prismen von gleicher Grundfläche und gleicher Höhe sind einander gleich.

Beweis. Jeder Durchschnitt eines Prisma, welcher parallel mit der Grundfläche geht, ist der Grundfläche gleich (§ 154.); sind also die Grundflächen zweier oder mehrerer Prismen einander gleich, so sind es auch alle ihre Durchschnitte; folglich sind die Prismen selbst, bei gleicher Höhe, einander gleich.

Anmerk. Es ist einerlei, ob das Prisma ein senkrechtes oder schiefwinkeliges ist.

§ 156. Lehrsatz. Prismen von gleicher Höhe und ungleicher Grundfläche verhalten sich wie ihre Grundflächen.

Beweis. Man setze das eine Prisma = A, seine Grundfläche = B und seine Höhe = H. Ein anderes Prisma sei = a, seine Grundfläche = b und seine Höhe ebenfalls = H.

Beide Grundflächen mögen in gleich große Theile getheilt werden, B z. B. in 7, b in 5, so ist

$$B : b = 7 : 5.$$

Ferner denke man sich jedes Prisma in mehrere kleinere Prismen zertheilt und zwar so, daß die Theile der Grundflächen B und b die Grundflächen der kleineren Prismen werden, so haben die kleineren Prismen gleiche Grundflächen und Höhen und sind folglich einander gleich.

Auf diese Art wird A in 7 und a in 5 gleiche Prismen zertheilt; folglich ist

A : a = 7 : 5. Nun war aber
auch B : b = 7 : 5

folglich A : a = B : b.

Man vergl. hiermit den ähnlichen Satz von den Parallelogrammen (§ 84).

Anmerk. Statt der Zahlen 7 und 5 können auch die unbestimmten Größen m und n gesetzt werden.

Zusatz. Dieser Beweis läßt sich auch auf Prismen von gleichen Grundflächen und ungleichen Höhen anwenden: nämlich Prismen von gleichen Grundflächen und ungleichen Höhen verhalten sich wie ihre Höhen.

§ 157. Lehrsatz. Prismen von ungleichen Grundflächen und ungleichen Höhen verhalten sich wie die Producte der Grundflächen und Höhen, d. h. sie stehen im zusammengesetzten Verhältniß ihrer Grundflächen und Höhen.

Beweis. Man nehme wieder zwei Prismen A und a, deren Grundflächen B und b, und Höhen H und h sind.

Ferner mögen beide Grundflächen wieder in gleich große Theile zertheilt werden, B in m, und b in n und die ganzen Prismen ebenfalls in kleinere Prismen, wie in (§ 156.);
so ist

$$B : b = m : n.$$

Nun besteht A aus m Prismen von gleicher Grundfläche und gleicher Höhe H, und a aus n Prismen von eben solchen Grundflächen, aber einer anderen sich gleichen Höhe h.

Bezeichnet man ein kleineres Prismen von ersteren mit p und ein kleineres von letzteren mit q, so ist A = m p und a = n q;

ferner ist

$$p : q = H : h$$

folglich $m p : n q = m H : n h$ (Algebra, Seite 76 ꝛc.),

d. i. $A : a = m H : n h$,

nun war aber $m : n = B : b$,

folglich $A : a = B H : b h$.

Also verhalten sich die Prismen wie *die Grundflächen multiplicirt* mit den Höhen.

Zusatz. Prismen sind gleich, wenn die Producte ihrer Grundlinien und Höhen gleich sind. In diesem Fall verhalten sich die Grundlinien umgekehrt wie die Höhen: Denn wenn ein Paar Prismen gleich sind und das eine hat eine kleinere Grundlinie als das andere, so muß seine Höhe auch wieder desto größer sein.

Ausmessung der Prismen.

§ 158. Erklärung. Auf vorhergehenden Satz gründet sich die Ausmessung der Prismen und die Ausmessung der Körper überhaupt. — Zur Ausmessung der Körper muß man einen Körper als Maßstab annehmen. Man hat daher den Würfel (Cubus) zum allgemeinen Maßstabe gewählt und nennt ihn eine Cubikruthe, Cubikfuß, Cubikzoll, Cubikmeile u. s. w., je nachdem seine Seite eine Ruthe, ein Fuß, eine Meile u. s. w. ist.

§ 159. Aufgabe. Ein Prisma auszumessen.

Auflösung. Man suche die Grundfläche desselben im Quadratmaße (§ 86.) und multiplicire sie mit der Höhe, die mit demselben Maße wie jene gemessen worden ist, und drücke das Product in gleichnamigem Cubikmaße aus.

Denn ein Prisma ausmessen heißt untersuchen, aus wie viel gleichen Würfeln irgend einer angenommenen Größe dasselbe besteht oder seinen Rauminhalt mit dem Inhalte eines Würfels vergleichen.

Der Würfel ist aber selbst ein Prisma, folglich verhält sich das auszumessende Prisma zum Würfel, wie das Product seiner Grundfläche und Höhe zum Producte der Grundfläche und Höhe eines Würfels (§ 157).

Es sei das Prisma = A, seine Grundfläche = B, seine Höhe = H und der Würfel = c, seine Grundfläche = b, seine Höhe = h, so ist

$$1)\ A : c = B H : b h.$$

Nun ist die Grundfläche des Würfels, b, ein Quadrat; und es enthalte die Grundfläche des Prisma, B, m solcher Quadrate, weil ein solches ihr Maßstab ist, so ist

$B = m b$; folglich aus (1)

$$2)\ A : c = m b H : b h.$$

Ferner ist die Seite des Quadrats der Höhe des Würfels gleich. Nimmt man also diese zum Maßstabe für die Höhe beider Körper an, und ist die Höhe des Prisma n mal so groß als die des Würfels, so ist

$$H = nh.$$

Daher wird die Proportion (2)

$$A : c = mnbh : bh$$

oder $A : c = mn : 1$,

folglich $A = mnc$.

Das Prisma besteht also aus $m.n$ Würfeln.

Den Würfel selbst kann man demnach für die Einheit nehmen, dann drückt das Product $m.n$ aus, wie vielmal das Prisma größer ist als der Würfel, oder wie groß es im Cubikmaß derjenigen Größe ist, mit welcher seine Höhe und seine Grundfläche in Quadratmaß gemessen ist.

Zusatz 1. Setzt man die Grundfläche eines Prisma wieder $= B$, seine Höhe $= H$ und den Cubikinhalt $= A$, so ist

$$1)\ A = BH.$$

Daraus folgt

$$2)\ B = \frac{A}{H}$$

und $3)\ H = \frac{A}{B}$.

Die beiden letztern Gleichungen lehren, aus dem gegebenen Inhalt und der Höhe eines Prisma seine Grundfläche B; und aus dem gegebenen Cubikinhalt und der Grundfläche seine Höhe H finden.

Zusatz 2. Ist das auszumessende Prisma selbst wieder ein Würfel, so ist die Höhe so groß als die Seite der Grundfläche, und die Grundfläche ist das Quadrat der Seite, folglich das Product der Grundfläche und Höhe der dritten Potenz oder dem arithmetischen Würfel der Zahl gleich, welche die Seite des Würfels ausdrückt

Zusatz 3. Setzt man die Seite eines Würfels $= a$ und seinen Cubikinhalt $= A$, so ist

$$4)\ A = a^3.$$

Daraus folgt

$$5)\ a = \sqrt[3]{A}.$$

Man findet also die Seite eines Würfels aus seinem Cubikinhalt, wenn man aus demselben die Cubikwurzel zieht.

Zusatz 4. Nach der Decimaleintheilung hat die Ruthe 10 Fuß, also die Cubikruthe 1000 Cubikfuß, der Cubikfuß 1000 Cubikzoll u. s. w. In diesem Maß ist z. B. $2c^0\ 124c'\ 528c''\ 326c''' = 2124528326c'''$. (Vergl. § 88).

Nach der Duodecimaleintheilung enthält die Längenruthe 12 Fuß und die Cubikruthe 1728 Cubikzoll u. s. w.

Anmerk. 1. Die Bezeichnung ($c^0\ c'\ c''\ldots$) heißt Cubikruthe, Cubikfuß u. s. w.

Anmerk. 2. Der Cubikinhalt wird auch Volumen genannt.

§ 160. Aufgaben.

1) Die Grundfläche eines Prisma sei 5 □′ 18 □″ 28 □‴ und seine Höhe 7′ 8″ (Decimalmaß); wie groß ist sein Cubikinhalt?
40c′ 425c″ 840c‴

2) Die Grundfläche eines Prisma sei 2 □′ 8 □″ und sein Cubikinhalt 8c′ 9c″; wie groß ist seine Höhe (Decimalmaß)? 3′ 8″ 5‴...

3) Die Grundfläche eines Prisma sei ein gleichseitiges Dreieck, dessen Seite = 4 Fuß, und Höhe das Prisma = 8 Fuß sei; man fragt nach dem Cubikinhalt.

Bezeichnet a die Seite des Dreiecks, h die Höhe des Prisma und A sein Volumen, so ist $A = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot h$ (vergl. §104, Aufg. 10.)

Also für a = 4, h = 8 ist $A = 32\sqrt{3} = 55{,}424$ Cubikfuß.

4) Das Volumen eines Prisma sei = 12 Cubikfuß und seine Höhe = 15 Fuß; die Grundfläche sei ein gleichseitiges Dreieck. Wie groß ist eine Seite desselben?

Nach vorhergehender Formel ist A = 12, h = 15, also

$$a = 4\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{15}} = 1{,}359..\ \text{Fuß}.$$

Zusatz. Ist in vorhergehender Formel h = a, so ist

$$A = \frac{a^3 \sqrt{3}}{4}, \text{ und } a = \sqrt[3]{\frac{4A\sqrt{3}}{3}}.$$

Dieser Ausdruck lehrt, aus dem Volumen eines Prisma, dessen Grundfläche ein gleichseitiges Dreieck, und dessen Höhe der Seite desselben gleich ist, die Seite selbst zu finden.

5) Das Volumen eines rechtwinkeligen parallelepipedischen Stabes sei = 42 Cubikzoll, und seine Dicke, Breite und Länge verhalten sich zu einander wie 9, 28, 288; wie dick, breit und lang ist der Stab?

Auflösung. Man nehme irgend eine Länge = x als gemeinschaftliches Maß dieser 3 Dimensionen an, so daß 9 x die Dicke, 28 x die Breite und 288 x die Länge des Stabes ausdrücken, so ist

$9.28.288\,x^3 = 42$, woraus folgt $x = \frac{1}{12}$. Es ist also $\frac{9}{12} = \frac{3}{4}$ Zoll der Dicke, $\frac{28}{12} = 2\frac{1}{3}$ Zoll der Breite und $\frac{288}{12} = 24$ Zoll der Länge gleich.

Anmerkung. Wie die Oberfläche eines Prisma im Quadratmaß gefunden wird, braucht wohl nicht besonders angeführt zu werden.

Aehnlichkeit der Prismen.

§ 161. Erklärung. Aehnliche Prismen sind solche, deren Grundflächen ähnliche Figuren sind, deren Seitenflächen gegen die Grundflächen einerlei Neigung haben, und deren Höhen sich wie gleichnamige Seiten der Grundflächen verhalten.

Zusatz. Alle Würfel sind ähnliche Körper.

§ 162. Lehrsatz. Aehnliche Prismen verhalten sich wie die Würfel gleichnamiger Seiten ihrer Grundflächen.

Beweis. Man bezeichne die Prismen wieder durch A und a, ihre Grundflächen durch B und b, zwei gleichnamige Seiten derselben durch D und d, und ihre Höhen durch H und h, so ist

$$B : b = D^2 : d^2 \text{ (§ 102.)}$$
$$\text{und } H : h = D : d,$$
$$\text{folglich } BH : bh = D^3 : d^3.$$
$$\text{Nun aber ist } A : a = BH : bh,$$
$$\text{folglich } A : a = D^3 : d^3.$$

Anmerkung. Ist also von den gleichnamigen Seiten die eine z. B. 4mal größer als die andere, so wäre das ganze Prisma 64mal größer als das andere.

Wenn die Seite eines Würfels noch einmal so groß, als die Seite eines andern ist, so ist der erstere Würfel achtmal so groß als der letztere.

Zusatz 1. Aehnliche Prismen verhalten sich auch zu einander wie die Würfel ihrer Höhen.

Zusatz 2. Gleichnamige Seiten sowohl als die Höhen ähnlicher Prismen verhalten sich wie die Cubikwurzeln aus dem Inhalte derselben.

Zusatz 3. Die Grundflächen ähnlicher Prismen verhalten sich zu einander wie die Quadrate ihrer Höhen, oder ihrer gleichnamigen Seiten.

Aus obiger Proportion $A : a = D^3 : d^3$ folgt:

$$D : d = \sqrt[3]{A} : \sqrt[3]{a} \text{ (Algebra, Seite 79).}$$

Wollte man ein Prisma construiren, das einem gegebenen ähnlich und noch einmal so groß als dasselbe wäre, so würde, wenn a das gegebene und A noch einmal so groß werden soll, die Proportion werden:

$$D : d = \sqrt[3]{2a} : \sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{2}.\sqrt[3]{a} : \sqrt[3]{a},$$

$$D : d = \sqrt[3]{2} : 1$$

$$\text{oder } d : D = 1 : \sqrt[3]{2}.$$

In diesem Fall müssen sich also die gleichnamigen Seiten zu einander verhalten wie $1 : \sqrt[3]{2}$.

Anmerk. Mit dieser Aufgabe, welche unter dem Namen der Verdoppelung des Würfels bekannt ist, haben sich die alten Mathematiker schon viel beschäftigt. Man nannte sie auch das Delische Problem (problema deliacum), und machte das Orakel des Apollo zu Delos zum Urheber derselben.

Diese Aufgabe ist zwar durch Berechnung leicht zu lösen, indem man nur die Cubikwurzel aus 2 zu ziehen braucht; nicht aber so einfach durch Construction darzustellen, wie die Seite eines Quadrats, welches noch einmal so groß ist als ein gegebenes (§ 96, Zus. 1).

§ 163. Aufgaben.

1) Ein Parallelepipedum sei 8' lang, 5' breit und 3' dick; wie lang, breit und dick muß ein 4mal größeres ihm ähnliches werden?

Man setze z. B. die Länge des 4mal größeren $= x$, so muß werden

$$1 : 4 = 8^3 : x^3, \text{ also } x^3 = 4.8^3,$$

$$\text{folglich } x = \sqrt[3]{4.8^3} = 8\sqrt[3]{4} = 12',7.$$

Ferner sei die Breite $= y$, so ist $8 : 8\sqrt[3]{4} = 5 : y$, also $y = 5\sqrt[3]{4} = 7',93$; dann sei die Dicke $= z$, so ist $8 : 8\sqrt[3]{4} = 3 : z$, und $z = 3\sqrt[3]{4} = 4',76$. (Vergleiche § 161).

Denn es ist $8.5.3 = 120\,c'$, und $8\sqrt[3]{4}.5\sqrt[3]{4}.3\sqrt[3]{4} = 8.5.3.4 = 4.120\,c'$, also viermal größer, wie es die Bedingung erfordert.

Anmerk. Die Größen y und z können eben so gut durch die Gleichungen $1 : 4 = 5^3 : y^3$, und $1 : 4 = 3^3 : z^3$ gefunden werden, was aber vergebliche Mühe sein würde. Eine dieser Größen aber, übrigens gleich viel welche, muß erst auf diesem Wege, dann die übrigen zwei wie nächst vorher bestimmt werden.

2) Die Höhe eines Prisma sei = 12 Fuß und seine Grundfläche = 8 □' 64 □"; wie groß muß die Höhe und die Grundfläche eines dreimal kleineren ähnlichen Prisma werden?

Auflös. Die Höhe x wird nach vorhergehender Auflösung gefunden $x = 4\sqrt[3]{9}$ Fuß. Nun verhalten sich die Quadrate der Höhen ähnlicher Prismen wie ihre Grundflächen. Also wenn y^2 die Grundfläche des neuen Prisma bezeichnet

$12^2 : (4\sqrt[3]{9})^2 = 864$ □" $: y^2$ oder $144 : 16\sqrt[3]{81} = 864 : y^2$, daher $9 : \sqrt[3]{81} = 864 : y^2$, d. i. $9 : 3\sqrt[3]{3} = 864 : y^2$ oder $3 : \sqrt[3]{3} = 864 : y^2$, also $y^2 = 288\sqrt[3]{3}$ Quadratzoll, wenn Decimalmaß gerechnet wird.

Der Cylinder oder die Walze.

§ 164. Erklärung. Ein Cylinder oder eine Walze ist ein Körper, der zwei gleiche und parallele Grundflächen hat, welche Kreise sind, und von einer einzigen krummen Seitenfläche eingeschlossen ist.

Der Abstand beider Grundflächen von einander bestimmt die Höhe des Cylinders.

Die gerade Linie von dem Mittelpunkte der einen Grundfläche nach dem Mittelpunkte der anderen heißt die Achse des Cylinders.

Steht die Achse senkrecht auf den Grundflächen, so heißt der Cylinder ein gerader, ist sie aber gegen dieselben geneigt, so heißt er ein schiefer.

Die Entstehung eines Cylinders kann man sich auf zweierlei Art denken: 1) wie die eines Prisma, indem sich ein Kreis in gerader Linie sich selbst parallel fortbewegt, und 2) indem sich ein rechtwinkeliges Parallelogramm um seine eine Seite herumdreht.

§ 165. Lehrsatz. Wenn ein Cylinder parallel mit der Grundfläche durchschnitten wird, so ist der Durchschnitt der Grundfläche gleich.

Der Beweis ist wie bei dem ähnlichen Lehrsatze von den Prismen (§ 154).

§ 166. Lehrsatz. Ein Cylinder ist einem Prisma von gleicher Grundfläche und gleicher Höhe gleich.

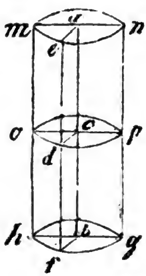


Fig. 152.

Beweis. Man nehme in der Grundfläche g h (Fig. 152.) den Punkt f an, und ziehe f e parallel mit der Achse a b; vom Punkt e ziehe man nach a die gerade Linie e a.

Da die Grundflächen m n und g h parallel sind, so ist auch a e parallel mit f b, daher ist a b f e ein Parallelogramm und a e = f b; a e und f b sind Halbmesser zweier Kreise; und da diese Halbmesser einander gleich sind, so sind es auch die Kreise.

Aus demselben Grunde ist d c = f b, daher der Schnitt o p der Grundfläche g h gleich.

Zusatz 1. Der Inhalt eines Cylinders wird daher in Cubikmaß gefunden, wenn man seine Grundfläche mit der Höhe multiplicirt.

Es sei der Halbmesser der Grundfläche = r, die Höhe des Cylinders = h, so ist der Cubikinhalt desselben, den wir mit A bezeichnen wollen

$$1)\ A = r^2 \pi h;\ 2)\ h = \frac{A}{r^2 \pi};\ 3)\ r = \sqrt{\frac{A}{\pi h}}.$$

Die Gleichungen (1) und (2) zeigen, wie aus dem Cubikinhalt und dem Halbmesser der Grundfläche die Höhe, und wie aus dem Inhalt und der Höhe der Halbmesser der Grundfläche gefunden wird.

Zusatz 2. Cylinder von gleichen Grundflächen und ungleichen Höhen verhalten sich wie ihre Höhen (vergl. § 156).

Ueberhaupt lassen sich auf den Cylinder dieselben Sätze anwenden, die von dem Prisma (§ 155 ꝛc.) aufgestellt worden sind.

§ 167. Erklärung. Aehnliche Cylinder sind solche, deren Achsen gegen die Grundflächen einerlei Neigung haben, und deren Höhen sich wie die Halb- oder Durchmesser der Grundflächen verhalten.

§ 168. Lehrsatz. Aehnliche Cylinder verhalten sich wie die Würfel der Halb- oder Durchmesser ihrer Grundflächen.

Beweis. Man bezeichne zwei solche Cylinder durch A und a, ihre Halbmesser durch R und r, und ihre Höhen durch H und h, so ist

$$A : a = R^2 H : r^2 h$$
$$H : h = R : r,$$

$$\text{daher } AH : ah = R^3 H : r^3 h,$$
$$\text{folglich } A : a = R^3 : r^3.$$

Zusatz 1. Aehnliche Cylinder verhalten sich wie die Würfel ihrer Höhen.

Zusatz 2. Die Halb- oder Durchmesser der Grundflächen ähnlicher Cylinder, ingleichen die Höhen derselben verhalten sich wie die Cubikwurzeln ihres Inhalts.

§ 169. Aufgaben.

1) Die Höhe einer Walze beträgt 12′ 2″ und der Halbmesser der Grundfläche 9″ 6‴; wie groß ist ihr Cubikinhalt (Decimalmaß)?
Antwort. 35 c′ 304 e″ $652\frac{1}{8}$ c‴.
2) Der Inhalt einer Walze sei = 1 c° 8 c′ 48 c″ und ihre Höhe = 12′ 8″; man fragt nach dem Halbmesser der Grundfläche.
Der Halbmesser ist = 5 Fuß $\frac{7}{28}$ Linien.
3) Der Umfang einer Walze ist 3 Fuß 11 Zoll und ihre Höhe $14\frac{3}{8}$; wie viel beträgt ihr Cubikinhalt?
Der Cubikinhalt ist = 12 c′ $217\frac{7}{10}$ c″.
4) Der Umfang eines durchgehends dicken Drahtes beträgt $\frac{1}{4}$ Linie und seine Länge 80 Fuß; wie groß ist sein Cubikinhalt (Duodecimalmaß)?
Der Cubikinhalt beträgt noch nicht $\frac{1}{8}$ Cubikzoll.
5) Der Umfang einer Brunnenröhre sei 4 Fuß 8 Zoll $6\frac{1}{4}$ Linien, ihre Länge 32′ und ihr Cubikinhalt, außer der Mündung, $31\frac{1}{482}$ Cubikfuß. Wie groß ist der Durchmesser der Mündung (Duodecimalmaß)?
Der Durchmesser der Mündung ist = $\frac{1}{2}$ Fuß.
6) Wenn ein Cylinder $14\frac{1}{2}$′ hoch und der Durchmesser der Grundfläche $1\frac{1}{3}$′ ist; wie groß muß die Höhe und der Durchmesser der Grundfläche eines $1\frac{3}{4}$mal kleineren ihm ähnlichen werden; und wie verhalten sich dann die Durchmesser beider zu einander?

Die Höhe muß werden = $\frac{29}{2}\sqrt[3]{\frac{4}{7}}$′, und der Durchmesser der Grundfläche = $\frac{4}{3}\sqrt[3]{\frac{4}{7}}$′.

Die Durchmesser verhalten sich wie $\frac{4}{3} : \frac{4}{3}\sqrt[3]{\frac{4}{7}}$, d. i. wie 1 zu $\sqrt[3]{\frac{4}{7}}$.

Berechnung der krummen Oberfläche des Cylinders.

Fig. 153.



§ 170. Die krumme Oberfläche eines geraden Cylinders ist einem Rechtecke gleich, dessen Grundlinie der Peripherie der Grundfläche und dessen Höhe der Höhe des Cylinders gleich ist.

Beweis. Da man den Cylinder als ein Prisma von unendlich viel Seitenflächen ansehen kann, so denke man sich einen solchen schmalen Streifen p q r s (Fig. 153). Dieser bildet ein Rechteck, dessen Grundlinie = r s und Höhe = p r ist. Alle diese Streifen haben aber dieselbe Höhe, welche dem Abstande der beiden Grundflächen also ihren Seitenlinien gleich ist, und die Summe ihrer Grundlinien ist dem Umfange der Grundfläche gleich.

Legt man nun alle diese Streifen mit ihren Seitenlinien in einer Ebenen an einander, so bilden sie zusammen ein Rechteck, dessen Grundlinie der Peripherie der Grundfläche und dessen Höhe dem Abstande beider Grundflächen, p r, also der Höhe des Cylinders gleich ist.

Zusatz 1. Setzt man den Flächeninhalt der krummen Oberfläche des Cylinders = b, den Halbmesser der Grundfläche = r, und die Höhe = h, so ist

$$b = 2\, r\, \pi\, h.$$

Zusatz 2. Aus der krummen Oberfläche eines geraden Cylinders läßt sich auch der Cubikinhalt desselben herleiten: denn multiplicirt man $2\, r\, \pi\, h$ mit $\frac{1}{2}\, r$, so erhält man $2\, r\, \pi\, h \,.\, \frac{1}{2} = r^2\, \pi\, h$, welches nach (§ 165, Zus. 1.) der Cubikinhalt desselben ist.

Zusatz 3. Die krummen Oberflächen zweier oder mehrerer Cylinder von gleicher Höhe verhalten sich zu einander wie die Halb- oder Durchmesser der Grundflächen.

Denn es sei der Halbmesser des einen Cylinders = r und der eines anderen = R, so ist die krumme Oberfläche des erstern $= 2\, r\, \pi\, h$ und die des zweiten $= 2\, R\, \pi\, h$,

daher $2\, r\, \pi\, h : 2\, R\, \pi\, h = r : R$.

Wenn also von zwei Cylindern, die gleiche Höhe haben, der Halbmesser des einen z. B. dreimal größer als der des andern, so ist auch die krumme Oberfläche des erstern dreimal größer als die des letztern.

Hieraus darf man aber nicht auf ein gleiches Verhältniß ihres Cubikinhaltes schließen: Denn bei angeführtem Beispiele würde der Cubikinhalt des größern Cylinders neunmal größer sein als der des kleinern.

Zusatz 4. Die beiden Grundflächen eines geraden Cylinders verhalten sich zur krummen Oberfläche desselben wie $2\, r^2\, \pi : 2\, r\, \pi\, h = r : h$ also wie der Halbmesser der Grundfläche zur Höhe des Cylinders.

Anmerk. Zur Bestimmung der krummen Oberfläche eines schiefen Cylinders ist die Hülfe der höhern Analysis erforderlich.

§ 171. Aufgaben.

1) Die Länge eines durchgehends dicken Drahtes sei = 600 Fuß, und seine Dicke = $\frac{1}{8}$ Linie in Duodecimalmaß; man fragt nach dem Inhalt seiner krummen Oberfläche. 4 □′ 52 □″.

2) Der Durchmesser eines Mühlsteines sei = $5\frac{1}{2}$ Fuß, seine Dicke = $3\frac{1}{2}$ Fuß und sein Cubikinhalt außer dem leeren Raume (Auge) = 81 c′ 981 c″ (Duodecimalmaß); wie viel beträgt der Durchmesser des Auges, die Grundfläche und die krumme Oberfläche desselben?

Der Durchmesser des Auges ist = $\frac{3}{4}$ Fuß, die Grundfläche = $23\frac{7}{16}$ und die krumme Oberfläche $43\frac{3}{4}\frac{1}{2}$ Quadratfuß.

3) Wenn von zwei ähnlichen geraden Cylindern der eine nmal größer ist als der andere, wie verhalten sich ihre Grundflächen und ihre krummen Oberflächen zu einander?

Auflösung. Es sei der Halbmesser des einen Cylinders = r, des andern = R, so ist die Grundfläche des ersteren $= r^2\, \pi$ und des anderen $= R^2\, \pi$.

Nun ist nach (§ 166.) $1 : n = r^3 : R^3$, also $R = r \sqrt[3]{n}$. Die Einsetzung dieses Werthes in $R^2\, \pi$ giebt $(r \sqrt[3]{n})^2 .\, \pi = r^2\, \pi \sqrt[3]{n^2}$. — Das Verhältniß beider Grundflächen ist also $r^2\, \pi : R^2\, \pi$, d. i. $r^2\, \pi : r^2\, \pi \sqrt[3]{n^2}$ oder $1 : \sqrt[3]{n^2}$.

Für die krummen Oberflächen sei h die Höhe des ersteren und H die des letzteren, so sind die entsprechenden krummen Oberflächen $2\,r\,\pi\,h$ und $2\,R\,\pi\,H$, es ist aber $R = r\sqrt[3]{n}$, und $H = h\sqrt[3]{n}$, daher $2\,R\,\pi\,H = 2\,r\,\pi\,h\sqrt[3]{n^2}$, folglich das Verhältniß beider Oberflächen $2\,r\,\pi\,h : 2\,r\,\pi\,h\sqrt[3]{n^2}$, d. i. wie 1 zu $\sqrt[3]{n^2}$, also wie oben, d. h. mit Worten: Die Grundflächen wie die krummen Oberflächen ähnlicher Cylinder verhalten sich wie die Einheit zur Cubikwurzel aus dem Quadrat derjenigen Zahl, welche anzeigt, wie vielmal der eine Cylinder größer oder kleiner als der andere ist.

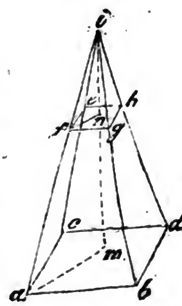
Zusatz. Dasselbe Verhältniß gilt auch von der *Grundfläche und* den Seitenflächen eines Prisma von beliebig vielen *Seiten*.

4) Aus der krummen Oberfläche und Höhe eines geraden Cylinders den Cubikinhalt desselben zu finden.

Auflös. Bezeichnet b die krumme Oberfläche, so ist $A = \frac{b^2}{4h\pi}$.

§ 172. Lehrsatz. Wenn eine Pyramide parallel mit der Grundfläche durchschnitten wird, so ist der Durchschnitt der Grundfläche ähnlich.

Fig. 154.



Beweis. Es sei die Pyramide (Fig. 154.) in fh parallel mit der Grundfläche durchschnitten, so sind 1) die Seiten des Durchschnitts den Seiten der Grundfläche parallel, d. h. fg mit ab, gh mit bd parallel u. s. w.

2) Ist der Winkel $f = a$, $g = b$ u. s. w.; 3) ist $if : fg = ia : ab$ und $if : fe = ia : ac$; woraus folgt, daß $fg : fe = ab : ac$ ist.

Auf ähnliche Weise läßt sich zeigen, daß auch die übrigen Seiten, von welchen gleiche Winkel eingeschlossen werden, einerlei Verhältniß haben, folglich ist der Durchschnitt fh ähnlich der Grundfläche ad.

Eben so läßt sich der Beweis für alle Arten von Pyramiden, hinsichtlich der Zahl ihrer Seitenfläche, führen.

Zusatz. Alle Durchschnitte, die der Grundfläche parallel gehen, sind einander ähnlich.

§ 173. Lehrsatz. Die Seite der Grundfläche einer Pyramide verhält sich zur gleichnamigen eines parallelen Durchschnitts, wie die Höhe der Pyramide zum Abstande des Durchschnitts von der Spitze.

Beweis. Es sei (Fig. 154.) ad parallel mit fh, und in ein Perpendikel von der Spitze auf die Grundfläche. Denkt man sich nun eine Ebene durch ina gelegt, so wird von derselben die Grundfläche in am und der parallele Schnitt in fn geschnitten. Es ist also am parallel mit fn, und daher

$$ia : im = if : in.$$

Nun ist aber auch $ia : ac = if : fe$

also $im : ac = in : fe$

oder $im : in = ac : fe.$

Da sich nun jede andere Seite der Grundfläche zur gleichnamigen des Durchschnitts verhält wie a c : f e, so verhalten sich überhaupt gleichnamige Seiten der Grundfläche und des Durchschnitts wie ihre Abstände i m und i n von der Spitze.

Zusatz. Die Durchschnitte selbst verhalten sich wie die Quadrate ihrer Abstände von der Spitze.

Denn es sei die Grundfläche = A und der parallele Durchschnitt = a, so ist

$$A : a = ac^2 : fe^2 \quad (\S\ 163, \text{Zus. } 3).$$

Nun ist auch $im : in = ac : fe$

daher $im^2 : in^2 = ac^2 : fe^2$

und wegen $A : a = ac^2 : fe^2$

folgt $A : a = im^2 : in^2$.

§ 174. Lehrsatz. Pyramiden von gleichen Grundflächen und gleicher Höhe sind einander gleich.

Beweis. Man denke sich zwei Pyramiden P und p, ihre Grundflächen B und b, und ihre Höhen H und h. Ferner sei ein Durchschnitt der ersteren in der Entfernung h von der Spitze = A, und ein Durchschnitt der letzteren in derselben Entfernung = a, so ist in der Pyramide P

$$B : A = H^2 : h^2$$

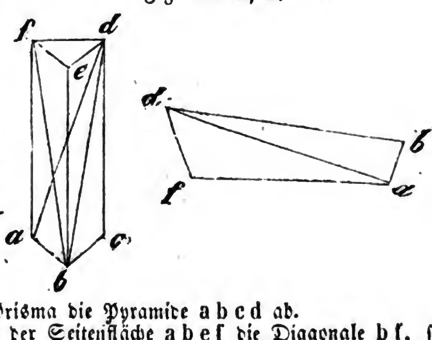
und in der Pyramide p $B : a = H^2 : h^2$

folglich $B : A = B : a$,

also A = a (Algebra S. 79.) d. h. die Pyramiden haben überall in gleichen Entfernungen von der Spitze gleiche Durchschnitte; folglich ist auch P = p.

§ 175. Lehrsatz. Eine dreiseitige Pyramide ist der dritte Theil eines dreiseitigen Prisma von gleicher Grundfläche und gleicher Höhe.

Fig. 155 a, b.



Beweis. Es sei (Fig. 155 a.) ein dreiseitiges Prisma. Zieht man in der Seitenfläche b c d e die Diagonale b d, eben so in der Seitenfläche a c d f die Diagonale a d, so schneidet das Dreieck a b d vom Prisma die Pyramide a b c d ab.

Zieht man ferner in der Seitenfläche a b e f die Diagonale b f, so schneidet das Dreieck b d f auch eine Pyramide f d e b ab, die mit dem Prisma, so wie mit der Pyramide a b c d gleiche Grundfläche und gleiche Höhe hat; daher ist die Pyramide a b c d gleich der Pyramide f d e b.

Der noch übrige Körper dfab ist ebenfalls eine Pyramide, welche dfa zur Grundfläche, und fba, dab und fdb zu Seitenflächen hat. Da nun die Pyramide dfba mit der Pyramide abcd gleiche Grundfläche und gleiche Höhe hat, so sind beide einander gleich. Da aber abcd auch gleich fdeb ist, so sind alle 3 Pyramiden einander gleich, mithin jede gleich dem dritten Theile des Prisma von gleicher Grundfläche und Höhe.

Zusatz 1. Da jedes vielseitige Prisma einem dreiseitigen von gleicher Grundfläche und Höhe gleich ist (§ 155.), so ist überhaupt jede Pyramide dem dritten Theil eines Prisma von gleicher Grundfläche und Höhe gleich.

Daher wird der Inhalt einer Pyramide in Cubikmaß gefunden, wenn man ihre Grundfläche mit dem dritten Theil der Höhe multiplicirt.

Wird also die Pyramide mit P, ihre Grundfläche mit A und Höhe mit H bezeichnet, so wird der Cubikinhalt derselben ausgedrückt durch

$$P = \frac{AH}{3}.$$

Zusatz 2. Pyramiden von gleichen Grundflächen verhalten sich wie ihre Höhen, und Pyramiden von gleicher Höhe verhalten sich wie ihre Grundflächen (§ 156.)

Zusatz 3. Pyramiden von ungleichen Grundflächen und ungleichen Höhen verhalten sich wie die Grundflächen multiplicirt mit den Höhen.

Aehnlichkeit der Pyramiden.

§ 176. Erklärung. Aehnliche Pyramiden sind solche, deren Grund- und Seitenflächen ähnliche Figuren sind, deren Seitenflächen mit den Grundflächen gleiche Neigungswinkel machen, und deren Höhen sich wie gleichnamige Seiten der Grundflächen oder der Seitenflächen verhalten.

§ 177. Aehnliche Pyramiden verhalten sich wie die Würfel gleichnamiger Seiten ihrer Grundflächen, oder wie die Würfel ihrer Höhen, oder wie der Würfel gleichnamiger Seitenlinien.

Der Beweis erhellet aus (§ 161.)

Zusatz 1. Gleichnamige Seiten der Grundflächen oder Seitenflächen, ingleichen die Höhen ähnlicher Pyramiden, verhalten sich wie die Cubikwurzeln ihres Inhalts (§ 162, Zus. 2.)

Zusatz 2. Wenn man eine Pyramide parallel mit der Grundfläche durchschneidet, so ist der obere Theil der ganzen Pyramide ähnlich.

Zusatz 3. In ähnlichen Pyramiden liegen Durchschnitte von gleicher Größe in gleichem Abstande von der Spitze.

Der Satz folgt unmittelbar aus vorhergehendem.

§ 178. Aufgaben.

1) Wie groß ist der Inhalt einer Pyramide, wenn ihre Grundfläche ein Dreieck ist, dessen Grundlinie 4′, dessen Höhe 3′ 8″ und die Höhe der Pyramide 14′ 6″ ist?

Es ist $P = \frac{38.20.146}{3} = 36ç' \ 987c''$.

2) Die Grundfläche einer Pyramide sei ein Quadrat, dessen Seite 8′ 7″ und die Höhe der Pyramide 19′ 6″ beträgt; wie groß ist ihr Inhalt? 494c′ 508c″.

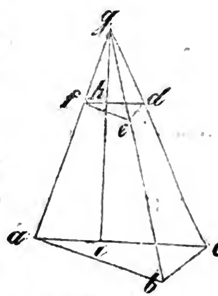
3) Die Grundfläche einer Pyramide sei ein regelmäßiges Sechseck, dessen Seite 5′ 4″ und die Höhe der Pyramide 24′ 6″ ist; wie groß ist ihr Cubikinhalt? 621c′ 212c″ 976c‴.

4) Eine Pyramide sei 19′ 6″ hoch; ihr körperlicher Inhalt gleich 78,46 Cubikfuß; ihre Grundfläche sei ein Quadrat. Wie groß ist eine Seite der Grundfläche? 3′ 4″ 6‴, 4...

5) Eine Pyramide sei 104′ hoch, und ihr Cubikinhalt 512 Fuß; ihre Grundfläche ein gleichseitiges Dreieck; wie groß ist eine Seite desselben? 5′ 8″ 4‴.

Die abgestumpfte Pyramide.

Fig. 156.



§ 179. Aufgabe. Der Cubikinhalt einer abgestumpften Pyramide abcdef zu finden, wenn die Grundfläche $abc = A$, die obere Fläche $def = a$, und der Abstand beider Flächen von einander, $hi = b$ gegeben ist (Fig. 156.)

Auflösung und Beweis. Man nehme zuerst die ganze Pyramide an und denke sich das fehlende Stück fedg auf die abgestumpfte aufgesetzt. Dann sei gi ein Perpendikel von der Spitze auf die Grundfläche und $gh = x$; also $gi = x + b$, so ist der Cubikinhalt der ganzen Pyramide

$abcg = \frac{1}{3} A (b + x)$ (§ 173, Zus. 1.); und der Cubikinhalt der oberen $fedg = \frac{1}{3} a x$;

folglich ist die abgestumpfte Pyramide, welche C heißen soll,

1) $C = \frac{1}{3} A (b + x) - \frac{1}{3} a x = \frac{1}{3} [A b + (A - a) x]$.

Es ist also nur x in bekannten Größen zu bestimmen.

Nun ist $A : a = (b + x)^2 : x^2$, also

$\sqrt{A} : \sqrt{a} = (b + x) : x$; folglich $x \sqrt{A} = b \sqrt{a} + x \sqrt{a}$;

daher $x = b \sqrt{a} : (\sqrt{A} - \sqrt{a})$.

Wird dieser Werth in die Gleichung (1) statt x gesetzt, so folgt

$$C = \frac{1}{3}\left[A b + (A - a) \cdot \frac{b \sqrt{a}}{\sqrt{A} - \sqrt{a}}\right] = \frac{1}{3} b \left(A + \frac{A - a}{\sqrt{A} - \sqrt{a}} \cdot \sqrt{a}\right).$$

Nun ist $\frac{A - a}{\sqrt{A} - \sqrt{a}} = \frac{(A - a)(\sqrt{A} + \sqrt{a})}{(\sqrt{A} - \sqrt{a})(\sqrt{A} + \sqrt{a})} = \sqrt{A} + \sqrt{a}$

(Algebra, Seite 151.)

Wird dieser Werth in vorhergehender Gleichung an seine Stelle gesetzt, so ergiebt sich endlich

$C = \frac{1}{3} b [A + (\sqrt{A} + \sqrt{a})\sqrt{a}] = \frac{1}{3} b (A + \sqrt{Aa} + a)$.

Man findet also den Cubikinhalt der abgestumpften Pyramide, wenn man die beiden Grundflächen nebst der Quadratwurzel aus ihrem Product zusammen addirt, und diese Summe mit dem dritten Theile des Abstandes beider Grundflächen multiplicirt.

Zusatz. Aus dem Ausdruck geht hervor, daß die abgestumpfte Pyramide so groß als drei Pyramiden ist, die alle gleiche Höhe h haben und von welchen die Grundfläche der einen = A, die der andern = a, und die der dritten $= \sqrt{A\,a}$, nämlich der mittleren geometrischen Proportionalgröße zwischen A und a, d. h. zwischen der untern und obern Grundfläche gleich ist.

§ 180. Aufgaben.

1) Die untere Grundfläche einer abgestumpften Pyramide sei 16 □′, die obere 9 □′ und der Abstand zwischen beiden Grundflächen 19′; wie groß ist der Cubikinhalt derselben?

Es ist $C = \frac{19}{3}\,[16\,\square' + \sqrt{16\,\square' . 9\,\square'} + 9\,\square']$
$= \frac{19}{3}\,(16 + 12 + 9) = 233\frac{1}{3}\,c'$

Anmerk. Da A und a in Quadratmaß ausgedrückt sind, so giebt das Product A a ein Biquadrat; folglich ist $\sqrt{A\,a}$ Quadratmaß sowie A und a, und kein Längenmaß.

2) Die beiden Grundflächen einer abgestumpften Pyramide seien Quadrate; die Seite der unteren Grundfläche sei 9′ 8″ und die Seite der oberen 7′ 3″; und der Abstand beider Grundflächen 12′ 6″; wie viel beträgt der Cubikinhalt derselben? 927 c′ 654 c″.

Die Oberfläche der Pyramide.

§ 181. Aufgabe. Die Seitenflächen einer Pyramide zu berechnen.

Auflös. Da die Seitenflächen einer Pyramide Dreiecke sind, so werden sie auch wie diese berechnet. Es wird aber hier vorausgesetzt, daß außer der Höhe der Pyramide auch die einzelnen Seiten der Grundfläche, wenn dieselbe ein unregelmäßiges Vieleck ist, und die Seiten nicht aus dem Flächeninhalt desselben bestimmt werden können, gegeben sein müssen.

Man denke sich eine senkrechte Pyramide, deren Grundfläche ein Quadrat sei (Fig. 154, Seite 111.), so sind alle 4 Dreiecke, welche die Seitenflächen ausmachen, einander gleich. Die Grundlinie eines solchen Dreieck z. B. i b d ist b d, und seine Höhe eine aus i auf b d gefällte Senkrechte, die wir mit a bezeichnen wollen, so ist der Quadratinhalt des Dreiecks $= \frac{1}{2}$ a . b d, oder $= \frac{1}{2}$ a b, wenn b die Grundlinie bedeutet; also $4 . \frac{1}{2}\,a\,b = 2\,a\,b$ der Inhalt der 4 Seitenflächen. Wollen wir aber a durch die Höhe der Pyramide i m = h ausdrücken, so ziehe man von m nach dem Punkte, der b d halbirt, eine gerade Linie, die c heißen mag, so ist $a = \sqrt{c^2 + h^2}$, also der Inhalt der 4 Seitenflächen $= 2\,b\,\sqrt{c^2 + h^2}$.

Zusatz. Da aber die Grundfläche ein Quadrat und die Pyramide senkrecht ist, so trifft das Perpendikel i m in die Mitte des Quadrats; daher ist $c = \frac{1}{2} b$, also $a = \frac{1}{2} \sqrt{4 h^2 + b^2}$; daher, wenn B den Inhalt der 4 Seitenflächen ausdrückt, $B = 4 . \frac{1}{2} a b = 2 a b$, d. i. $B = b \sqrt{4 h^2 + b^2}$. Für $h = 8$, $b = 4$, erhält man $B = 16 \sqrt{17}$ = 66 □' nahe.

Bemerkung. Wenn die Pyramide schief ist, so kann sie, ohngeachtet die Grundfläche ein Quadrat oder irgend eine andere regelmäßige Figur ist, dennoch eine solche Stellung haben, daß kein Dreieck dem andern gleich ist. Daher ist in solchen Fällen ein jedes derselben besonders zu berechnen. Die Bestimmung der Höhe solcher Dreiecke aus dem Abstande der Höhe und der Seite der Grundfläche kann dann bisweilen mühsam werden.

Einfacher ist daher die Rechnung, wenn die Höhen mit gegeben sind oder unmittelbar gemessen werden können. Das einzige hierüber angeführte Beispiel mag hinreichend sein.

Der Kegel.

§ 182. Erklärung. Der Kegel (conus), ist ein Körper, der von einem Kreise als Grundfläche und von einer krummen Seitenfläche eingeschlossen ist, die in einem einzigen Punkte ausläuft, welcher die Spitze des Kegels heißt, und von welcher sich nach jedem Punkte der Peripherie gerade Linien ziehen lassen.

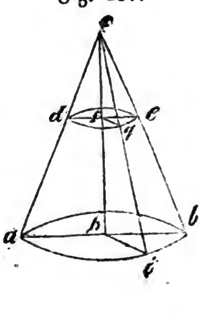
Der Abstand der Spitze von der Grundfläche heißt die Höhe des Kegels und eine gerade Linie von der Spitze bis zum Mittelpunkte der Grundfläche die Achse desselben.

Zusatz 1. Steht die Achse senkrecht auf der Grundfläche, so heißt der Kegel ein gerader, ist sie geneigt gegen dieselbe, so heißt er ein schiefer Kegel.

Zusatz 2. Wird der Kegel mit einer durch die Achse gelegten Ebene durchschnitten, so ist der Durchschnitt ein Dreieck. Die Seitenlinien dieses Dreiecks heißen Seiten des Kegels.

Beim geraden Kegel sind diese gleich, beim schiefen nicht; daher heißt ersterer auch ein gleichseitiger, letzterer ein ungleichseitiger Kegel.

Fig. 157.



Zusatz 3. Der gerade Kegel entsteht, wenn sich ein rechtwinkeliges Dreieck um eine seiner Katheten dreht.

§ 183. Lehrsatz. Der parallele Durchschnitt eines Kegels mit der Grundfläche ist ebenfalls ein Kreis.

Beweis. Es sei der Kegel (Fig. 157.) in d e parallel mit der Grundfläche durchschnitten; man nehme an, es sei durch die Achse eine Ebene gelegt, welche die Grundfläche und den Durchschnitt in a b und d e durchschneidet, so ist d e parallel mit a b

und daher $ch : hb = cf : fe$
dann auch $ch : ha = cf : fd$

folglich $hb : ha = fe : fd$.

Da nun $hb = ha$ ist, so ist auch $fe = fd$.

Ferner denke man sich noch eine zweite Ebene, die ebenfalls durch die Achse gelegt ist und die Grundfläche und den parallelen Durchschnitt in i und g schneide, so ist auch fg parallel mit hi, und mithin
$ch : hi = cf : fg$. Nun war aber oben
$ch : hb = cf : fe$

folglich $hi : hb = fg : fe$.

Und da auch $hi = hb$ ist, weil beide Radien sind, so ist auch $fg = fe$.

Es sind demnach alle Linien, die von f bis an die Peripherie gezogen werden alle einander gleich, folglich sind sie Halbmesser, deren Kreis der Durchschnitt ist.

§ 184. Lehrsatz. Der Halbmesser der Grundfläche eines Kegels verhält sich zum Halbmesser des parallelen Durchschnitts, wie die Höhe des Kegels zum Abstande des Durchschnitts von der Spitze.

Dieser Beweis wird auf ähnliche Art geführt wie bei der Pyramide (§ 173.) Denn was dort den gleichnamigen Seiten der Grundfläche und des parallelen Durchschnitts gilt, das gilt auch bei dem Kegel dem Halbmesser der Grundfläche und des parallelen Durchschnitts; denn die Halbmesser in beiden Kreisen sind ebenfalls als gleichnamige Linien oder Seiten zu betrachten.

Zusatz. Die Durchschnitte, d. h. die Kreise verhalten sich wie die Quadrate ihrer Abstände von der Spitze (§ 163, Zus. 3).

§ 185. Lehrsatz. Ein Kegel ist eine Pyramide von gleicher Grundfläche und gleicher Höhe gleich.

Beweis. Es sei die Grundfläche beider Körper = A, ihre Höhe = H, dann sei in beiden ein Parallelschnitt in gleichem Abstande von der Spitze = h; aber der Durchschnitt des Kegels sei = B und der der Pyramide = C, weil die Gleichheit beider Durchschnitte erst erwiesen werden soll.

Alsdann ist

in dem Kegel $A : B = H^2 : h^2$
in der Pyramide $A : C = H^2 : h^2$

folglich $A : B = A : C$.

Daher ist $B = C$.

Da nun die Durchschnitte einander gleich sind, so sind auch beide Körper einander gleich.

Zusatz 1. Der Kegel kann angesehen werden als eine Pyramide von unendlich vielen Seitenflächen.

Zusatz 2. Ein Kegel ist dem dritten Theil eines Cylinders von gleicher Grundfläche und Höhe gleich.

Setzt man daher den Halbmesser der Grundfläche = r, die Höhe des Kegels = h, und bezeichnet den Cubikinhalt desselben mit C, so ist

$$1)\ C = \tfrac{1}{3} r^2 \pi h$$

$$\text{daraus folgt } 2)\ h = \frac{3C}{r^2 \pi}$$

$$\text{und } 3)\ r = \sqrt{\frac{3C}{\pi h}}.$$

Kegel von gleichen Grundflächen verhalten sich wie ihre Höhen.

Zusatz 3. Kegel von ungleichen Grundflächen und ungleichen Höhen verhalten sich wie die Producte der Grundlinien und Höhen.

Zusatz 4. Kegel sind einander gleich, wenn die Producte ihrer Grundflächen und Höhen gleich sind.

§ 186. Erklärung. Aehnliche Kegel sind solche, deren Achsen gegen die Grundflächen einerlei Neigung haben, und deren Höhen sich wie die Halbmesser oder Durchmesser ihrer Grundflächen verhalten.

§ 187. Aehnliche Kegel verhalten sich wie die Würfel der Halb- oder Durchmesser ihrer Grundflächen, oder wie die Würfel ihrer Höhen oder ihrer Achsen.

Der Beweis kann auf ähnliche Art wie (§ 176.) gefolgert werden. Ueberhaupt finden zwischen Kegel und Pyramide durchgängig ähnliche Verhältnisse Statt.

Auch verhalten sich die Höhen, die Achsen, die Halb- oder Durchmesser der Grundflächen ähnlicher Kegel wie die Cubikwurzeln aus ihrem Inhalte.

§ 188. Aufgaben.

1) Der Inhalt eines Kegels sei = 1 Cubikfuß, und der Durchmesser der Grundfläche = 1 Fuß; wie groß ist seine Höhe? 3,82... Fuß.

2) Der Durchmesser eines geraden Kegels sei = 3′ und seine Höhe 8′ 7″; wie groß ist die Seitenlinie eines viermal größeren ähnlichen Kegels? 8′ 8″, 28...

3) Der Inhalt eines Kegels sei = 50 c′ 240 c″, und seine Höhe dreimal größer als der Durchmesser der Grundfläche; wie groß ist die Höhe und der Durchmesser?

Auflösung. Der Durchmesser sei = x Fuß, so ist die Höhe = 3 x Fuß, also

$$\frac{x^2\ \pi . 3x}{4.3} = 50240, \text{ daher } x^3 = \frac{50240.4}{3{,}14},$$

woraus folgt x = 4 Fuß.

4) Der Inhalt eines Kegels sei = 96,1625 Cubikfuß, und der Durchmesser verhält sich zur Höhe wie 14 zu 15; man verlangt den Durchmesser und die Höhe selbst.

Auflösung. Es sei x gleich dem Durchmesser, so ist $14 : 15 = x : \frac{15\ x}{14}$; die vierte Proportionale $\frac{15\ x}{14}$ ist also die Höhe; daher ist

$\frac{x^2}{4}\pi . \frac{15}{3.14} . x = 96,1625$, oder $x^3 = 96,1625.56 : 5.3,14$; also

$$x = \sqrt[3]{\frac{14,2325.56}{3,14}} = 7 \text{ Fuß der Durchmesser und}$$

$$\frac{15}{14} . 7 = 7\tfrac{1}{2} \text{ Fuß die Höhe.}$$

5) Der Inhalt eines Kegels sei = 821, 633... Cubikfuß; und seine Höhe dem Umfange der Grundfläche gleich, wie groß ist seine Höhe und der Durchmesser der Grundfläche. Bezeichnet p den Umfang (§ 121.) so ist

$\frac{p^2}{4\pi} . \frac{p}{3} = \frac{p^3}{12.3,14} = 821,633...$, woraus folgt $p = 31,4$ Fuß

für den Umfang und die Höhe, und $\frac{p}{\pi} = 10$ Fuß für den Durchmesser.

6) Der Inhalt eines geraden Kegels betrage 84, 78 Cubikfuß; und seine Höhe verhalte sich zur Seitenlinie wie 4 zu 5; wie viel betragen beide Größen nebst dem Durchmesser?

Auflösung. Bezeichnet x die Höhe, so ist nach (Aufg. 3.) $\frac{5}{4}$ x gleich der Seitenlinie, daher

$$\sqrt{(\tfrac{5}{4}\ x)^2 - x^2} = \tfrac{3}{4}\ x \text{ der Halbmesser, also}$$

$$(\tfrac{3}{4}\ x)^2\ \pi . x = \frac{9\ x^3\ \pi}{16} = 84,78, \text{ woraus folgt}$$

$x = \sqrt[3]{\frac{84,78.16}{9,3,14}} = 12$ für die Höhe, $\frac{5}{4} . 12 = 15$ für die Seitenlinie und 18 Fuß für den Durchmesser.

7) Der Inhalt eines schiefen Kegels sei = 1490′, 52, sein Durchmesser = 6′ und seine größte Seitenlinie, d. h. diejenige, die unter allen Seitenlinien mit der Grundfläche den kleinsten Winkel macht, = 20′; man soll die kleinste Seitenlinie suchen, welche nämlich mit der Grundfläche den größten Winkel bildet.

Auflösung. Man suche zuerst die Höhe; diese ist = 12.149,52 : 36.314 = 16′.

Man bezeichne nun das verlängerte Stück des Durchmessers bis zur Höhe mit x, so ist dieses mit dem Durchmesser, nämlich $6 + x = \sqrt{20^2 - 16^2} = \sqrt{400 - 256} = \sqrt{144} = 12'$, also $x = 12 - 6 = 6'$. Stellt ferner y die gesuchte kleinste Seitenlinie vor, so ist $y = \sqrt{6^2 + 16^2} = \sqrt{292} = 17', 0...$

8) Aus den beiden äußersten Seitenlinien eines schiefen Kegels, d. h. der größten und kleinsten, und dem Durchmesser seine Höhe zu finden.

Auflösung. Die größte Seitenlinie sei $= a$, die kleinste $= b$, der Durchmesser $= d$, die Höhe $= z$, dann bezeichne x dasselbe wie in vorhergehender Aufgabe, so ist $z^2 = a^2 - (d - x)^2$, ingleichen $z^2 = b^2 - x^2$, daher $a^2 - (d + x)^2 = b^2 - x^2$, woraus folgt

$$x = \frac{x^2 - b^2 - d^2}{2\,d};$$ alsdann findet man auch $z = \sqrt{b^2 - x^2}$,

wenn man statt x den so eben in bekannten Größen erhaltenen Werth setzt.

Der abgestumpfte Kegel.

§ 189. Aufg. Den Inhalt eines abgestumpften Kegels zu finden, wenn der Halbmesser der Grundfläche, der Halbmesser der ebenen Fläche und der Abstand beider Flächen gegeben ist.

Auflös. Man denke sich den fehlenden Theil des Kegels aufgesetzt, so daß dadurch der ganze Kegel dargestellt wird (Fig. 157, Seite 116.) $c\,h$ sei ein Perpendikel von der Spitze bis auf die Grundfläche, $c\,f = x$, und der Abstand beider Grundflächen, $h\,f = d$, so ist $h\,c = d + x$. Ferner sei der Halbmesser der untern Grundfläche $= R$, der obern $= r$, alsdann ist der Inhalt des ganzen Kegels $a\,b\,c = \frac{1}{3}\,x^2\,\pi\,(k + x)$, und des obern Kegels $d\,e\,c = \frac{1}{3}\,r^2\,\pi\,x$.

Folglich der Inhalt des abgestumpften Kegels, welcher $= e$ sei,

$$E = \tfrac{1}{3}\,R^2\,\pi\,(k + x) - \tfrac{1}{3}\,r^2\,\pi\,x$$
$$= \tfrac{1}{3}\,\pi\,[R^2\,(k + x) - r^2\,x] = \tfrac{1}{3}\,\pi\,(R^2\,k + R^2\,x - r^2\,x)$$
$$= \tfrac{1}{3}\,\pi\,[R^2\,k + (R^2 - r^2)\,x].$$

Nun ist $k + x : x = R : r$,
folglich $R\,x = (k + x)r$, also

$$x = \frac{k\,r}{R - r}.$$

Setzt man den Werth von x in vorhergehende Gleichung, so ist

$$E = \tfrac{1}{3}\,\pi\left[R^2\,k + \frac{(R^2 - r^2)\,k\,x}{R - r}\right].$$

Nun ist aber $R^2 - r^2 = (R + r)\,(R - r)$,

daher $\dfrac{R^2 - r^2}{R - r} = \dfrac{(R + r)\,(R - r)}{R - r} = R + r$; also endlich

$$E = \tfrac{1}{3}\,\pi\,[R^2\,k + (R + r)\,k\,r],$$
d. i. I. $E = \frac{1}{3}\,\pi\,k\,(R^2 + R\,r + r^2)$.

Man vergleiche hiermit den Ausdruck für die abgestumpfte Pyramide (Seite 114).

Zusatz 1. Der abgestumpfte Kegel ist so groß als drei Kegel zusammen genommen, die alle gleiche Höhe mit dem abgestumpften haben, und bei welchen der Halbmesser der Grundfläche des einen $= R$, des andern $= r$ und des dritten $\sqrt{Rr}$, d. h. gleich der mittlern Proportionale zwischen R und r ist.

Zusatz 2. Die obige allgemeine Formel für den abgestumpften Kegel läßt sich noch auf eine andere Form bringen: nämlich es ist
$\frac{R^2 + Rr + r^2}{3} = \left(\frac{R+r}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{R-r}{2}\right)^2$, folglich

$$\text{II. } E = k\pi\left[\left(\frac{R+r}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{R-r}{2}\right)^2\right].$$

Da dieser Ausdruck $= k\left(\frac{R+r}{2}\right)^2 \pi + \frac{k}{3}\left(\frac{R-r}{2}\right)^2 \pi$

ist, so zeigt derselbe, daß der abgestumpfte Kegel so groß als zwei Cylinder ist, von welchen der erstere die Höhe des abgestumpften Kegels zur Höhe und die halbe Summe der Halbmesser beider Grundflächen zum Radius hat; und daß die Höhe des andern gleich dem dritten Theil der Höhe des erstern und der Radius der Grundfläche desselben so groß ist, als die Hälfte der Differenz der Halbmesser beider Grundflächen.

Zusatz 3. Setzt man in obigen Ausdruck für den abgestumpften Kegel, in I. oder II., $r = R$, so erhält man

$$E = k\pi R^2$$

also den Ausdruck für den Cylinder; und setzt man $r = 0$, so folgt

$$E = \frac{1}{3} k\pi R^2,$$

also der Ausdruck für den Kegel.

Zusatz 4. Aehnliche abgestumpfte Kegel verhalten sich ebenfalls wie die *Würfel ihrer gleichnamigen Seiten*, und letztere wie die Würfel des *Inhalts dieser Körper*.

Anmerkung. Wenn die Halbmesser oder die Durchmesser der beiden Grundflächen nicht viel von einander verschieden sind, so kann man auch zwischen beiden das arithmetische Mittel nehmen und den abgestumpften Kegel dann wie einen Cylinder berechnen. Wir erhalten demnach

$$E = \left(\frac{R+r}{2}\right)^2 \pi k = \frac{1}{4}\pi k\,(R^2 + 2Rr + r^2).$$

Ist hingegen r gegen R bedeutend kleiner, so kann diese Formel nicht gebraucht werden.

§ 190. Aufgaben.

1) Es sei der Durchmesser der unteren Grundfläche eines abgestumpften Kegels $= 10''$, der Durchmesser der oberen $= 6''$, die Höhe $= 14''$; wie groß ist der Inhalt des abgestumpften Kegels?

Es ist nach Formel II.

$$E = 14 . 3,14\,[4^2 + \frac{1}{3}(1)^2] = 14 . 3,14 . \frac{49}{3} = 718\ c'',013.$$

Anmerk. Die meisten Baumstämme, viele Gefäße, Hohlgemäße, Braubottige u. s. w. können als abgestumpfte Kegel betrachtet und auf obige Art berechnet werden.

2) Die Durchmesser der beiden Grundflächen eines Baumstammes betragen einzeln 13″ und 9½″, der Abstand beider Flächen oder die Länge des Stammes = 13 (Duodecimalmaß); wie groß ist sein Cubikinhalt?

Es ist $E = 13.12.3,14 \left[\left(\frac{45}{4}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{7}{4}\right)^2\right]$
$= 13.3,14.124 : 4 = 13.1531.3,14 = 62498,42\,c''$
$= 36\,c'\;290\,c''$.

3) Wie viel Eimer enthält ein Braubottig, wenn der Durchmesser der größern Grundfläche 18 Fuß, und der der kleinern 15½ Fuß und die Höhe desselben 7½ Fuß beträgt? Hier werden die innern Durchmesser und auch die Höhe von innen verstanden.

Das Maß ist Preußisches, von welchem der Fuß auch 12 Zoll hat; der Eimer enthält 30 Quart und ein Quart 64 Cubikzoll. Macht man die Fuß zu Zollen, so ist

$E = 90.3,14'' \left[\left(\frac{201}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{15}{2}\right)^2\right] = 90.3,14.10119.$

Dividirt man die Zahl mit 30.64 = 1920, so erhält man die Anzahl der Eimer, nämlich

$$\frac{90.10119.3,14}{1920} = 496,467 \text{ Eimer.}$$

4) Die Höhe eines Gefäßes sei 5½′, der Halbmesser der untern Grundfläche 3½′ und der der obern 3′; wie groß müssen die beiden Halbmesser und die Höhe eines nur halb so großen ähnlichen Gemäßes werden?

Die Halbmesser müssen werden beziehungsweis $\frac{7\sqrt[3]{4}}{8}$, $\frac{3\sqrt[3]{4}}{8}$, und die Höhe $\frac{11\sqrt[3]{4}}{8}$.

5) Es soll ein Hohlgemäß nach einem gegebenen Verhältniß seiner Höhe und der Durchmesser seiner Grundflächen, und welches einem gegebenen Inhalt in sich faßt, angefertigt werden.

Dieses Gemäß soll z. B. 100 Quart in sich fassen, und seine Höhe dem Durchmesser der größern Grundfläche gleich sein, und diese sich zu dem der kleinern Grundfläche verhalten wie 5 zu 4.

Auflösung. Man nehme ein Gemäß von beliebiger Größe aber nach vorgeschriebenem Verhältniß an, und berechne seinen Cubikinhalt; dann bestimme man die Größe der gleichnamigen Seiten des verlangten Gemäßes nach (§ 189, Zus. 4).

Es sei die Höhe des angenommenen Gemäßes = 5 Fuß, der Durchmesser der untern Grundfläche auch = 5 Fuß und des obern = 4 Fuß, so ist

$$E = 5.3,14 \left[\left(\frac{7}{4}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^2\right] = \frac{5.3,14}{48}(3.49 + 1) = \frac{5.37.3,14}{12}.$$

Da dieser Ausdruck Cubikfuße bezeichnet und ein Quart 64 c'' hat, so ist die Anzahl der Quart, welche dieses Gemäß in sich faßt,

$$= \frac{5.37.3,14.1728}{11,64} = 1307,025 \text{ Quart.}$$

Nun ist $1307,025 : 100 = 5^3 : x^3$,

$$\text{also } x = 5 \sqrt[3]{\frac{100}{1307,025}} = 2,1226.$$

Ferner ist $5 : 4 = 2,1226 : y$, also

$$y = \frac{2,1226.4}{5} = 1,698.$$

Der größere Durchmesser des verlangten Gemäßes so auch die Höhe desselben muß also werden $= 2', 1226$ und der kleinere Durchmesser $= 1', 698$.

6) Ist außer den beiden Halb- oder Durchmessern die Seitenlinie s statt des Abstandes k gegeben, so ist $k = \sqrt{s^2 - (R - r)^2}$, wo also $a\,m = R - r$ ist (Fig. 157, Seite 116.)

$$\text{Folglich } E = \pi \sqrt{s^2 \ (R - r)^2} \, x \left[\left(\frac{R+r}{2}\right)^2 + \tfrac{1}{3}\left(\frac{R-r}{2}\right)\right]$$

(siehe Formel II. § 186.)

Die Oberflächen der Kegel.

§ 191. Aufgaben.

1) Die krumme Oberfläche eines geraden Kegels zu finden.

Auflös. Wenn sich ein rechtwinkeliges Dreieck um eine seiner Katheten dreht, wodurch der gerade Kegel beschrieben wird (Seite 116), so beschreibt die Hypotenuse in diesem Fall zugleich die krumme Oberfläche oder den Mantel des Kegels.

Dieser Mantel ist daher einem Kreisausschnitte gleich, der mit der Hypotenuse des erzeugenden Dreiecks oder mit der Seite des Kegels beschrieben wird, und zu welchem ein Bogen dieses Kreises gehört, der mit der Grundfläche des Kegels gleichen Umfang hat.

Zusatz 1. Man findet also den Inhalt der krummen Oberfläche in Quadratmaß, wenn man die Peripherie der Grundfläche mit der halben Seite des Kegels multiplicirt (§ 123.)

Zusatz 2. Es sei der Halbmesser der Grundfläche $= r$, und die Höhe des Kegels $= h$, so ist die Seite desselben $= \sqrt{h^2 + r^2}$, und daher die krumme Oberfläche, die f heißen soll,

$$f = 2\, r \pi . \tfrac{1}{2} \sqrt{h^2 + r^2} = r \pi \sqrt{h^2 + r^2}.$$

Zusatz 3. Die krumme Oberfläche des geraden Kegels verhält sich zu seiner Grundfläche wie $r\pi\sqrt{h^2 + r^2} : r^2\pi = \sqrt{h^2 + r^2} : r$, d. i. wie die Seite zum Halbmesser der Grundfläche.

Anmerk. Die krumme Oberfläche eines schiefen Kegels kann nicht ohne Hülfe der höhern Analysis gefunden werden.

2) Die krumme Oberfläche eines abgestumpften geraden Kegels zu finden.

Auflös. Es sei der Halbmesser der unteren Grundfläche $= R$, der oberen $= r$, $cf = x$, $fh = k$ (Fig. 157, Seite 116), so ist die krumme Oberfläche des ganzen Kegels $= R\pi\sqrt{(k + x)^2 + R^2}$ und des oberen, dce, $= r\pi\sqrt{x^2 + r^2}$, folglich die Oberfläche K des abgestumpften Kegels

$$K = R\pi\sqrt{(k + x)^2 + R^2} + r\pi\sqrt{x^2 + r^2}.$$

Nun ist $cf : fd = dm : ma$ oder $x : r = k : (R - r)$,

$$\text{folglich } x = \frac{kr}{R-r}.$$

Ferner ist $ef : fd = ch : ha$, d. i. $x : r = (k - x) : R$,

$$\text{also } k + x = \frac{Rx}{r} = \frac{R}{r} \cdot \frac{kr}{r-R} = \frac{kR}{R-r}.$$

Setzt man nun die so eben erhaltenen Werthe von x und $k + x$ in obiger Gleichung an ihre gehörige Stelle, so folgt

$$K = R\pi\sqrt{\frac{k^2 R^2}{R-r)^2} + R^2} - r\pi\sqrt{\frac{k^2 r^2}{(R-r)^2} + r^2} =$$

$$\frac{R^2\pi}{R-r}\sqrt{k^2 + (R - r)_2} - \frac{r^2\pi}{R-r}\sqrt{k^2 + (R - r)^2}$$

$$= \left(\frac{R^2 - r^2}{R - r}\right)\pi\sqrt{k^2 + (R - r)^2};$$

und wegen $\frac{R^2 - r^2}{R - r} = \frac{(R + r)(R - r)}{R - r} = R + r$ ist endlich

$$K = (R + r)\pi\sqrt{k^2 + (R - r)^2}.$$

Zusatz 1. Für $R = r$ wird $K = 2R\pi k$, also der Ausdruck für die krumme Oberfläche eines Cylinders; und setzt man $r = 0$, so wird $K = R\pi\sqrt{k^2 + R^2}$, also der Ausdruck für die krumme Oberfläche eines ganzen Kegels.

Zusatz 2. Führt man statt R und r die entsprechenden Peripherien P und p ein, wo also $R = \frac{P}{2\pi}$ und $r = \frac{\pi}{2r}$ ist, und setzt $\sqrt{k^2 + (R - r)^2} = s$, welches die Seitenlinie ist, so erhält man

$$k = (P + p) \tfrac{1}{2} s.$$

Die krumme Oberfläche des abgestumpften Kegels ist also einem Trapezium gleich, dessen parallele Seiten den Peripherien und dessen Höhe der Seitenlinie des Kegels gleich sind.

Zusatz 3. Denkt man sich den *abgestumpften Kegel durch die Mitte* seiner Höhe fh (Fig. 157.) mit einer der *Grundfläche parallelen Ebene* geschnitten, so ist der Halbmesser dieses Durchschnitts die *mittlere arithmetische* Proportionale zwischen R und r, also $= \frac{1}{2}(R + r)$ und sein Umkreis $= 2 . \frac{1}{2}(R + r)\pi = (R + r)\pi$, also ebenfalls die mittlere arithmetische Proportionale zwischen den Peripherien P und p der beiden Grundflächen, daher liegt auch die Peripherie $(R + r)\pi$, d. i. $\frac{1}{2}(P + p)$ in der Mitte der Seitenlinie af.

Zusatz 4. Setzt man $R + r = s$, so wird $k = s^2 \pi$, d. i. wenn man die Summe der beiden Halbmesser des abgestumpften geraden Kegels seiner Seitenlinie gleich sind, so ist die krumme Oberfläche einem Kreise gleich, dessen Halbmesser dieser Seitenlinie gleich ist.

3) Man soll das Verhältniß der krummen Oberflächen zweier geraden Kegel bestimmen, die sich zu einander verhalten wie 1 zu n.

Auflösung. Die Halbmesser der Grundflächen beider Kegel seien r und R und die *entsprechenden* Höhen h und H; so ist die krumme Oberfläche des ersteren $= r\pi\sqrt{r^2 + h^2}$ und des letzteren $= R\pi\sqrt{R^2 + H^2}$ (§ 186), also ihr Verhältniß $r\sqrt{r^2 + h^2} : R\sqrt{R^2 + H^2}$.

Nun ist nach (§ 184.) $R = r\sqrt[3]{n}$ und $A = h\sqrt[3]{n}$. Setzt man nun statt R und H in das Glied rechter Hand die so eben erhaltenen Werthe, so wird dasselbe $= r\sqrt[3]{n^2} . \sqrt[3]{r^2 + h^2}$, also das Verhältniß beider Flächen $1 : \sqrt[3]{n^2}$ (vergl. § 168, Aufg. 3.)

Anmerk. Dasselbe Verhältniß gilt auch für die krummen Oberflächen der abgestumpften ähnlichen Kegel und, wie sich ferner zeigen wird, nicht nur für diese, sondern für die sämmtlichen Oberflächen der ähnlichen Körper überhaupt.

Die Kugel.

§ 192. Erklärung. Eine Kugel (sphaera oder globus) ist ein Körper, der von einer krummen Fläche (Oberfläche der Kugel) begrenzt wird, die von einem festen, innerhalb der Kugel liegenden Punkte überall gleich weit entfernt ist.

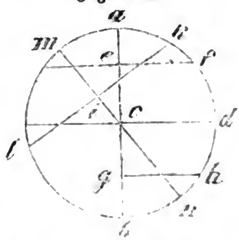
Dieser Punkt heißt der Mittelpunkt (centrum); und eine gerade Linie von demselben nach irgend einem Punkte der Oberfläche ein Halbmesser oder Radius, und diejenige gerade Linie, die von irgend einem Punkte der Oberfläche durch den Mittelpunkt bis an die entgegengesetzte Seite derselben geht, wird ein Durchmesser (Diameter) genannt.

Zusatz 1. Alle Halbmesser so wie alle Durchmesser sind einander gleich.

Zusatz 2. Durch den Halb- oder Durchmesser ist die Kugel bestimmt.

Zusatz 3. Die Entstehung der Kugel kann man sich so denken, daß ein Halbkreis sich um seinen unverrückten Durchmesser umdreht.

Fig. 158.



§ 193. Lehrsatz. Wird eine Kugel an irgend einer Stelle von einer Ebene durchschnitten, so ist der Durchschnitt ein Kreis.

Beweis. Während sich der Halbkreis a b d um seinen Durchmesser a b dreht, beschreiben alle auf demselben senkrecht stehenden Linien, wie g h, c d, e f Kreise (Fig. 158.)

Wird also ein ebener Schnitt senkrecht auf a b gemacht, so muß derselbe immer einer dieser Kreise sein.

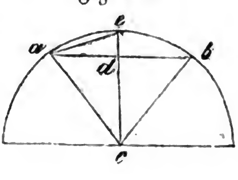
Wird der obere Schnitt nach einer andern beliebigen Richtung z. B. nach k l gemacht, so muß es ebenfalls einen Durchmesser m n geben, welchen er rechtwinkelig durchschneidet; und i k muß daher ebenfalls der Halbmesser eines Kreises sein, der so wie die Kugel selbst durch Umdrehung des Halbkreises m f n um m n entstanden ist. Folglich ist der ebene Durchschnitt jedesmal ein Kreis.

Zusatz 1. Diejenigen Kreise auf einer Kugel, deren Mittelpunkte in demselben Durchmesser a b der Kugel liegen, laufen einander parallel, und heißen deshalb Parallelkreise.

Zusatz 2. Unter allen Parallelkreisen ist der (mit dem Halbmesser c d beschriebene) dessen Mittelpunkt also der Mittelpunkt der Kugel ist, der größte und heißt daher ein größter Kreis der Kugel.

Zusatz 3. Jeder Durchschnitt, der durch den Mittelpunkt der Kugel geht, ist ein größter Kreis derselben. — Alle größten Kreise der Kugel sind einander gleich, und sie halbiren sich gegenseitig, weil die gemeinschaftliche Sehne von je zweien derselben durch den Mittelpunkt der Kugel geht und also ein Durchmesser ist.

Fig. 159.



§ 194. Lehrsatz. Die ebenen Durchschnitte einer Kugel sind um so größer, je näher sie bei dem Mittelpunkte, und um so kleiner, je weiter sie von demselben entfernt sind.

Beweis. Es sei (Fig. 159.) a b ein beliebiger ebener Durchschnitt der Kugel, c ihr Mittelpunkt, und a c ihr Halbmesser;

man fälle aus c das Perpendikel c d auf a b, so ist a d = d b (§ 52.), also a d oder d b ein Halbmesser des kleinern Kreises a b. Man setze a c = R, a d = r, und c d = h, so ist

$$r = \sqrt{R^2 - h^2}.$$

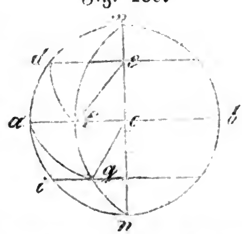
Je größer also h wird, desto kleiner wird r; und ist h = R, so ist r = o. Je kleiner aber h wird, desto größer wird r; und ist h = o, d. h. geht der Durchschnitt durch den Mittelpunkt der Kugel, so ist $r = \sqrt{R^2} = R$, also dem Halbmesser der Kugel gleich.

Durchschnitte einer Kugel, die gleich weit vom Mittelpunkte derselben liegen, sind einander gleich; und umgekehrt, liegen gleiche Durchschnitte einer Kugel gleich weit vom Mittelpunkte.

§ 195. Erklärung. Ein Durchmesser, der senkrecht auf einem andern Kreise steht, heißt in Beziehung auf diesen Kreis die Achse desselben; und die beiden Endpunkte ihre Pole. Ein Durchmesser kann daher auch mehreren Parallelkreisen zugehören.

§ 196. Erklärung. Wenn die Ebenen zweier Kreise einander rechtwinkelig durchschneiden, so stehen auch ihre Kreise senkrecht auf einander. Der Winkel, den zwei Kreise einer Kugel mit einander bilden, ist der Neigungswinkel ihrer Ebenen. Dieser Winkel heißt, wenn die Bogen, die ihn einschließen, größten Kreisen zugehören, ein sphärischer.

Fig. 160.



§ 197. Lehrsatz. Ein größter Kreis, der durch die Pole eines andern geht, steht senkrecht auf demselben, so wie auf allen Parallelkreisen desselben.

Beweis. Es sei (Fig. 160.) a b der Durchmesser eines größten Kreises, dessen Pole m und n sind, so ist m n senkrecht auf der Ebene des Kreises a b und aller Parallelkreise desselben.

Legt man also durch m n einen größten Kreis m a n b, so ist auch die Ebene desselben auf der Ebene m a b und auf den Parallelkreisen d f, i h senkrecht, folglich steht r auf allen diesen Kreisen senkrecht.

Dieser Satz gilt auch umgekehrt; nämlich: wenn ein größter Kreis senkrecht auf einen andern steht, so geht es durch die Pole desselben.

Zusatz 1. Legt man durch m n noch einen andern größten Kreis m g n, so schneiden die Ebenen beider sich unter dem Winkel a c g, dessen Maß der Bogen a g ist; daher ist auch a g das Maß der sphärischen Winkel bei m und n, d. h. des Winkels d m f und i n h.

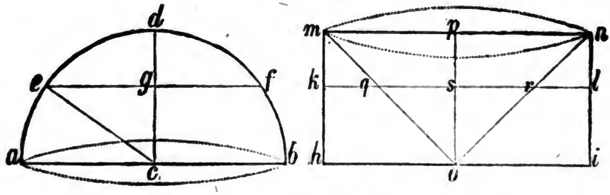
Ein sphärischer Winkel wird also durch den Bogen eines größten Kreises gemessen, auf welchem beide Schenkel desselben senkrecht stehen.

Zusatz 2. Die Bogen der Parallelkreise wie d f, i h werden immer durch den Bogen eines größten Kreises a g, den zwei größte Kreise zwischen sich fassen und durch die Pole der ersteren gehen, gemessen, weil die Neigung beider Ebenen m a n und m g n überall dieselbe ist. Daher sind auch die Bogen aller Parallelkreise zwischen beiden Ebenen einander ähnlich.

Von der Ausmessung der Kugel.

§ 198. Lehrsatz. Der Cubikinhalt der Halbkugel ist so groß als zwei Drittheile eines Cylinders, dessen Durchmesser gleich dem Durchmesser der Kugel und dessen Höhe dem Halbmesser derselben gleich ist.

Fig. 161 a, b.



Beweis. Es sei (Fig. 161 a) ein Halbkugel c ihr Mittelpunkt, also a b der Durchmesser eines größten Kreises, der hier die Grundfläche bezeichnen soll, und c d ein Halbmesser, der auf der Grundfläche senkrecht stehe, dann sei (Fig. 161 b) der erwähnte Cylinder, und p o seine Achse (§ 162.)

Man stelle sich nun vor, aus dem Cylinder sei ein gerader Kegel m o n von derselben Grundfläche und Höhe des Cylinders ausgeschnitten.

Man denke sich ferner durch die Kugel und den Cylinder einen beliebigen Schnitt e f, k l, der mit der Grundfläche a b und h i parallel ist und von ihnen gleichen Abstand c g = o s hat.

Es sei nun c e = r, so ist auch der Voraussetzung zufolge c d = o p = o h = s k = r, also der Cubikinhalt des ganzen Cylinders $= r^2 \pi . r = r^3 \pi$, und des Kegels oder des hohlen Raums m o n $= \frac{1}{3} r^3 \pi$, also des ausgefüllten Raums h m o n i $= r^3 \pi - \frac{1}{3} r^3 \pi = \frac{2}{3} r^3 \pi$. Diesem soll die Halbkugel gleich sein, was nämlich zu erweisen ist.

Der Flächeninhalt des ebenen Schnitts e f, der ein Kreis ist, also g e zum Halbmesser hat, ist $= ge^2 \pi = (r^2 - cg^2) \pi$; der Inhalt des Schnitts q k l r ist aber ein Ring, dessen Inhalt ist $= sk^2 \pi - sq^2 \pi = (r^2 - sq^2) \pi$ (§ 126.)

Der Annahme zufolge ist aber p m = p o, daher auch s q = o s = c g, d. h. es ist $(r^2 - cg^2) \pi = (r^2 - sq^2 \pi$, nämlich die Kreisfläche e f in dem Ringe q k l r gleich.

Es war aber e f willkürlich angenommen, also gilt dieser Satz auch für jeden andern Durchschnitt. Da nun der ausgefüllte Raum des Cylinders nach m n hin immer mehr abnimmt, so wird auch der Ring immer schmäler, je größer sein Abstand von h i ist; in gleichem Maße wird auch der entsprechende Durchschnitt der Halbkugel immer kleiner, bis der Inhalt beider Durchschnitte in m, d gleich Null wird. Das Gegentheil findet statt, je kleiner der Abstand des Durchschnittes von h i ist.

Man denke sich nun in der Halbkugel wie im Cylinder eine unzählige Menge solcher parallelen Durchschnitte und betrachte sie als sehr dünne

Scheiben, so muß die Summe derselben in beiden Körpern gleich sein, d. h. es ist die Halbkugel gleich dem ausgefüllten Raum hmoni des Cylinders, welches so viel ist als zwei Drittheile des ganzen Cylinders oder $= \frac{2}{3}\, r^3\, \pi$; der Cubikinhalt der ganzen Kugel ist daher $= \frac{4}{3} r^3\, \pi$.

Zusatz 1. Es ist auch die ganze Kugel so groß als zwei Drittheile eines Cylinders, dessen Höhe gleich dem Durchmesser seiner Grundfläche und gleich dem Durchmesser der Kugel ist. Denn der oben betrachtete Cylinder muß bei derselben Grundfläche für die ganze Kugel eine doppelte Höhe erhalten; sein Cubikinhalt ist demnach $= r^2\, \pi . 2\, r$ $= 2\, r^3\, \pi$, wenn der der Kugel $= \frac{4}{3}\, r^3\, \pi$ ist.

Zusatz 2. Setzt man den Cubikinhalt der Kugel = m, so ist

$$1)\ m = \tfrac{4}{3}\, r^3\, \pi, \text{ woraus folgt } 2)\ r = \sqrt[3]{\frac{3\,m}{4\,\pi}}.$$

Führt man den Durchmesser d, also $\frac{1}{2}\, d = r$ ein, so ist

$$3)\ m = \frac{d^3\, \pi}{6},\quad 4)\ d = \sqrt[3]{\frac{6\,m}{\pi}}.$$

Zusatz 3. Da der Inhalt der Kugel $= \frac{4}{3}\, r^3\, \pi$, und der eines nach (Zusatz 1.) betrachteten Cylinders $= 2\, r^3\, \pi$ ist, so verhalten sich beide Körper zu einander wie $\frac{4}{3}\, r^3\, \pi$ zu $2\, r^3\, \pi$, d. i. wie $\frac{4}{3}$ zu 2 oder wie $\frac{2}{3}$ zu 1.

Zusatz 4. Vergleicht man mit diesen zwei Körpern noch den Kegel, der mit dem Cylinder gleiche Grundfläche und gleiche Höhe hat, so verhalten sich der Kegel, die Kugel und der Cylinder zu einander wie $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$ und 1, d. i. wie 1, 2 und 3.

Zusatz 5. Bezeichnet man zwei verschiedene Kugeln mit M und m und ihre Halbmesser mit R und r, so ist

$$M = \tfrac{4}{3}\, R^3\, \pi, \text{ und } m = \tfrac{4}{3}\, r^3\, \pi, \text{ folglich}$$

$M : m = \frac{4}{3}\, R^3\, \pi : \frac{4}{3}\, r^3\, \pi$, d. i. $M : m = R^3 : r^3$, d. h. Kugeln verhalten sich wie die Würfel ihrer Halbmesser, aber auch wie die Würfel ihrer Durchmesser.

Zusatz. 6. Aus vorhergehender Proportion folgt:

$$\sqrt[3]{M} : \sqrt[3]{m} = R : r, \text{ d. i.}$$

die Halbmesser der Kugeln verhalten sich wie die Cubikwurzeln aus dem Inhalte der Kugeln; dasselbe gilt auch von den Durchmessern.

Berechnung der Oberfläche der Kugel.

§ 199. Lehrsatz. Der Quadratinhalt der Oberfläche der Kugel ist 4mal so groß als die Fläche eines größten Kreises derselben.

Beweis. Es ist gestattet anzunehmen, die Kugel sei ein Inbegriff einer unzähligen Menge unendlich kleiner, gleich großer Kegel, deren Spitzen alle im Mittelpunkte und Grundflächen in der Oberfläche der Kugel liegen. Die Höhe eines solchen Kegels ist daher = r, wenn r den Halbmesser der Kugel bezeichnet.

Nun sei die Grundfläche eines jeden dieser Kegel = a und ihre unendliche Anzahl = n, so drückt das Product a n die Oberfläche der Kugel aus. Ferner ist der Cubikinhalt eines solchen Kegels $= a . \frac{1}{3}\, r$

$= \frac{1}{3}$ a r, also der Inhalt aller Kegel $= \frac{1}{3}$ a r n, welches zugleich der Cubikinhalt der Kugel, also $= \frac{4}{3} r^3 \pi$ ist, folglich ist $\frac{1}{3}$ a r n $= \frac{4}{3} r^3 \pi$, daher a n $= 4 r^2 \pi$. Es war aber a n der Oberfläche der Kugel gleich; folglich die Kugeloberfläche 4mal größer als die Fläche eines größten Kugelkreises, der nämlich $= r^2 \pi$ ist.

Zusatz 1. Man bezeichne die Oberfläche der Kugel mit q, so ist

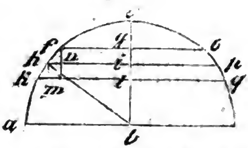
$$q = 4 r^2 \pi.$$

Zusatz 2. Die Oberfläche einer Kugel ist gleich dem Mantel eines geraden Cylinders, der ihren Durchmesser zur Höhe und ihren einen größten Kreis zur Grundfläche hat.

Zusatz 3. Die Oberflächen der Kugeln verhalten sich zu einander wie die Quadrate ihrer Halb- oder Durchmesser.

Berechnung der krummen Oberfläche ein Kugelstreifens oder einer Zone und der Kugelmütze (Calotte).

Fig. 162.



§ 200. Lehrsatz. Die krumme Oberfläche einer Kugelzone ist gleich dem Producte aus ihrer Höhe mit der Peripherie eines größten Kreises derselben Kugel.

Beweis. Es sei (Fig. 162.) a b c ein Kreisquadrant; man ziehe k l und f g mit a b parallel. Dreht sich nun der Quadrant um seinen unverrückten Halbmesser b c, so beschreibt er die Halbkugel und der Bogen k f einen Streifen k f e g. Man ziehe ferner f m senkrecht auf k l, so ist f m die Höhe der Zone; endlich halbire man f k in h, und ziehe h i mit k l parallel, so liegt h i in der Mitte zwischen k l und f g (§ 191, Zus. 3.) Man nehme nun an, der Streifen k f e g sei sehr schmal, so daß man das kleine Bogenstück k f als eine gerade Linie ansehen kann, so ist der Flächeninhalt dieses Streifens der krummen Oberfläche eines abgestumpften Kegels gleich, welche nach (§ 189, Zus. 2.) ist $= 2 \pi . h i . k f$.

Nun folgt aus der Aehnlichkeit der rechtwinkeligen Dreiecke k f m und b h i, $k f : f m = b h : h i$, also $h i . k f = f m . b h$, daher ist der Streifen auch $= 2 \pi . f m . b h$.

Bezeichnet man nun b h als den Radius der Kugel mit r und f m als die Höhe der Zone mit h und die Zone mit z, so ist

$$z = 2 \pi\ r . h.$$

Zusatz 1. Die Formel für die Kugelzone gilt nicht nur für sehr schmale, sondern überhaupt auch für jeden breiten Streifen: denn setzt man $h = r$, so ist $z = 2 r^2 \pi$, also der halben Oberfläche der Kugel gleich.

Zusatz 2. Vorhergehende Formel läßt sich auch auf die Kugelmütze, dergleichen e f d ist, anwenden (Fig. 161 a). Es ist nämlich e f d gleich der Oberfläche der Halbkugel vermindert um die Zone a c f b oder es ist $e f d = 2 r^2 \pi - 2 \pi r h = 2 \pi r (r - h)$, wo $h = c g$ ist. Nun ist aber $r - h = b c - c g = d d$; daher, wenn die Calotte mit y bezeichnet wird,

$$y = 2 r \pi . d g.$$

Zusatz 3. Setzt man $c g = r$, so erhält man $y = 2 r^2 \pi$, also wieder der Oberfläche der Halbkugel gleich.

Zusatz 4. Wenn die Ebene der Parallelkreise, welche verschiedene Zonen einer Kugel begrenzen, gleichen Abstand von einander haben, so sind die Zonen einander gleich.

Zusatz 5. Da $z = 2 \pi r h$ und $q = 4 r^2 \pi$ (§ 198.), so ist

$$z : q = 2 \pi r h : 4 r^2 \pi = h : 2 r,$$

d. h. die Zone verhält sich zur Oberfläche der ganzen Kugel, wie die Höhe der Zone zum Durchmesser der Kugel.

Der Kugelausschnitt und Kugelabschnitt.

§ 201. Aufg. Den Inhalt eines Kugelausschnitts a c b (siehe Fig. 159.) zu finden.

Auflös. Sowie die ganze Kugel als ein Inbegriff von Pyramiden oder Kegeln (§ 198.) von unendlich kleiner Grundfläche und einer Höhe gleich dem Kugelhalbmesser angesehen werden kann, so läßt sich auch der Ausschnitt als der Inbegriff solcher Pyramiden betrachten.

Man findet daher den Inhalt desselben, wenn man die Oberfläche des Kugelabschnitts oder die Calotte a b e mit dem dritten Theile des Kugelhalbmessers multiplicirt.

Setzt man die Höhe des Abschnitts, $d e = h$, den Halbmesser der Kugel $= r$, so ist der Kugelausschnitt, der mit V bezeichnet werde,

$$V = 2 \pi r h . \tfrac{1}{3} = \tfrac{2}{3} r^2 \pi h.$$

Zusatz 1. Es ist $\frac{2}{3} r^2 \pi h = \frac{1}{3} \pi r^2 . 2 h$, folglich der Kugelausschnitt einer Kugel gleich, dessen Grundfläche dem größten Kugelkreise und dessen Höhe der doppelten Höhe des Abschnitts a b e gleich ist.

Zusatz 2. Für $h = r$ wird $V = \frac{2}{3} r^3 \pi$, also der Halbkugel gleich.

Zusatz 3. Um den Kugelabschnitt $a b e = W$ zu finden, ziehe man den Kegel a b c vom Ausschnitt ab; also ist

$$W = \tfrac{2}{3} r^2 \pi h - a d^2 . \pi . \tfrac{1}{3} c d = \tfrac{1}{3} \pi (2 r^2 h - a d^2 c d.)$$

Nun ist nach obiger Formel $d e = h$, also $c d = c e - d e = r - h$, und $a d^2 = a c^2 - c d^2 = r^2 - (r - h)^2 = r^2 - r^2 + 2 r h - h^2 = (2 r - h) h$, also $a d^2 . c d = (2 r - h)(r - h) h = (2 r^2 - 3 r h + h^2) h$ $W = \frac{1}{3} \pi h [2 r^2 - (2 r^2 - 3 r h + h^2)] = \frac{1}{3} \pi h^2 (3 r - h)$, endlich $W = \pi h^2 (r - \frac{1}{3} h)$.

Hiernach ist also der Kugelabschnitt, dessen Höhe $= h$ ist, einem Cylinder gleich, dessen Grundfläche einen Halbmesser $= h$ hat und dessen Höhe $= r - \frac{1}{3} h$ ist.

§ 202. Aufgaben.

1) Der Halbmesser einer Kugel sei $= 1\frac{1}{2}$ Fuß; wie groß ist ihr Cubikinhalt und ihre Oberfläche?

Antwort. Der Cubikinhalt beträgt 14, 13 Cubikfuß und die Oberfläche 28, 26 Quadratfuß.

2) Der Durchmesser der Erde ist beinahe 1719 deutsche oder geographische Meilen; wie viele Cubikmeilen beträgt ihr körperlicher Inhalt und wie viele Quadratmeilen ihre Oberfläche?

Der körperliche Inhalt ist = 2659072000 Cubikmeilen, und die Oberfläche = 9281910 Quadratmeilen.

3) Der Inhalt einer Kugel sei = 1 Cubikfuß; man verlangt ihren Durchmesser und ihre Oberfläche.

Der Durchmesser ist = 1, 24... Fuß und die Oberfläche = 4835 Quadratfuß.

4) Aus der Oberfläche einer Kugel ihr Volumen zu finden.

Auflösung. Aus der Gleichung $q = 4\,r^2\,\pi$ (§ 198.), folgt $r^2 = \frac{q}{4\pi}$, also $r = \sqrt{\frac{q}{4\pi}}$, und $r^3 = \frac{q}{4\pi}\sqrt{\frac{q}{4\pi}}$

$= \frac{q}{8\pi}\sqrt{\frac{q}{\pi}}$.

Die Einsetzung dieses Werthes von r^3 in die Gleichung $m = \frac{4}{3}\,r^3\,\pi$ giebt $m = \frac{q\sqrt{q\pi}}{6\pi}$. Für $q = 3{,}1415..$ Quadratfuß folgt

$$m = \frac{3{,}1415}{6} = 0{,}5236 \text{ Cubikfuß nahe.}$$

5) Zwei Kugeln verhalten sich zu einander wie m zu n; wie verhalten sich ihre Oberflächen?

Auflösung. Die Halbmesser der Kugeln seien R und r, so ist $R^3 : r^3 = m : n$ (§ 197, Zus. 5.), und das Verhältniß der Oberflächen $R^2 : r^2$ (§ 198, Zus. 2.)

Aus vorhergehender Proportion geht hervor $R = r\sqrt[3]{\frac{m}{n}}$, also

$R^2 = r^2\sqrt[3]{\frac{m^2}{n^2}}$. Die Einsetzung dieses Werthes in letzteres Verhältniß giebt $r^2\sqrt[3]{\frac{m^2}{n^2}} : r^2$, d. i. $\sqrt[3]{\frac{m^2}{n^2}} : 1$; und durch Multiplikation beider Glieder mit $\sqrt[3]{n^2}$ folgt endlich das Verhältniß $\sqrt[3]{m^2} : \sqrt[3]{n^2}$.

Für $m = 1$ ergiebt sich das allgemeine Verhältniß der Oberflächen ähnlicher Körper, welches oben schon mehrmals vorkommt.

6) Wenn sich aber die Oberflächen zweier Kugeln verhalten wie m zu n; wie verhalten sich dann die Kugeln ihrem Volumen nach zu einander?

Auflösung. Wie $\sqrt{m^3} : \sqrt{n^3}$ oder wie $m\sqrt{m} : n\sqrt{n}$.

Für $m = 1$ und $n = 2$ folgt das Verhältniß $1 : 2\sqrt{2}$, d. h. wenn die Oberfläche der einen Kugel das Doppelte der anderen ist, so beträgt ihr Cubikinhalt mehr als das Doppelte jener und zwar $\sqrt{2}$ mal mehr.

7) Ein Würfel, dessen Seite in n gleiche Theile getheilt ist, besteht bekanntlich aus n^3 kleinen gleich großen Würfeln.

Denkt man sich nun in jeden dieser kleinen Würfel eine Kugel beschrieben, so sind sonach vermöge der hier angenommenen Lage auch n^3 solcher kleinen Kugeln im ganzen Würfel enthalten. Der Cubikinhalt aller dieser kleinen Kugeln zusammen beträgt eben so viel als der Inhalt einer einzigen im ganzen Würfel beschriebenen Kugel, deren Durchmesser nämlich der Seite desselben gleich ist. Man soll diesen Satz beweisen.

8) Der Durchmesser einer hohlen Kugel sei = 12 Zoll; der Inhalt ihrer durchgehends gleich dicken Schale = 626,6976 Cubikzoll; wie dick ist die Schale?

Auflösung. Der Inhalt der ganzen Kugel mit Inbegriff des leeren Raums ist $= \frac{4}{3} . 6.6.6.3,1416 = 904,7808$ Cubikzoll; also $904,7808 - 626,6976 = 268,0832$ der Inhalt des leeren Raums. Hiervon suche man den Halbmesser. Nun ist zunächst $268,0832 : \frac{4}{3}.3,1416 = 64$; folglich der Halbmesser $= \sqrt[3]{64} = 4$, also die gesuchte Dicke $= 6 - 4 = 2$ Zoll.

Zusatz. Um die Auflösung in einem allgemeinen Ausdrucke darzustellen, so sei der Halbmesser der ganzen Kugel = R, des hohlen Raums = r, der Cubikinhalt der Schale = a und die gesuchte Dicke der Schale $= R - r = x$.

$$\text{Nun ist } \tfrac{4}{3}(R^3 - r^3)\pi = a, \text{ also } r = \sqrt[3]{R^3 - \frac{3a}{4\pi}},$$

$$\text{daher } x = R - \sqrt[3]{R^3 - \frac{3a}{4\pi}}.$$

Anmerkung. Soll R aus x und a gesucht werden, so gelangen wir zu einer Gleichung des dritten Grades in R, deren Auflösung hier nicht gezeigt werden kann.

9) Man will eine hohle Kugel verfertigen, deren Oberfläche 4 und innere Fläche 2¼ Quadratfuß groß werden soll; man verlangt den Durchmesser der ganzen Kugel des hohlen Raums und die Dicke ihrer Schale.

Auflös. Nach Aufgabe 4. ist der Inhalt der ganzen Kugel

$$= \frac{4\sqrt{4\pi}}{6\pi} = \frac{4\sqrt{\pi}}{\pi 3^3}.$$

Nun ist aber auch, wenn R den Halbmesser der ganzen Kugel bezeichnet, $\frac{4\sqrt{\pi}}{3\pi} = \frac{4}{3}\pi^3\pi$, also R $= \sqrt[3]{\frac{\sqrt{\pi}}{\pi 2}}$. Ferner ist der hohle Kugelraum $= 2\frac{1}{4}\sqrt{2\frac{1}{4}\pi} : 6\pi = \frac{27\sqrt{\pi}}{48}$.

Es ist aber auch, wenn r den Halbmesser des hohlen Kugelraums darstellt, $\frac{27\sqrt{\pi}}{48\pi} = \frac{4}{3} r^3\pi$; woraus folgt $r = \frac{3}{4}\sqrt[3]{\frac{\sqrt{\pi}}{\pi^2}}$; also die Dicke der Schale $= R - r = \frac{1}{4}\sqrt[3]{\frac{\sqrt{\pi}}{\pi 2}} = 1$ Zoll 4,11 Linien.

10) Wenn ein Würfel mit einer Kugel gleichen Cubikinhalt hat; wie verhalten sich die Oberflächen beider Körper zu einander?

Auflös. Man nehme den Inhalt der Kugel wie oben $= \frac{4}{3} r^3 \pi$ an, so ist auch der Inhalt des Würfels $= \frac{4}{3} r^3 \pi$, also seine eine Seite $= \sqrt[3]{\frac{4}{3} r^3 \pi} = r\sqrt[3]{\frac{4\pi}{3}}$, und das Quadrat derselben $= r^2\sqrt[3]{\frac{16\pi^2}{9}}$, daher die Gesammtoberfläche des Würfels $= 6 r^2 \sqrt[3]{\frac{16\pi^2}{9}} = 12 r^2 \sqrt[3]{\frac{2\pi^2}{9}}$; die Oberfläche der Kugel ist $= 4 r^2 \pi$, also das gesuchte Verhältniß $12 r^2 \sqrt[3]{\frac{2\pi^2}{9}} : 4 r^2 \pi$ oder $3\sqrt[3]{\frac{2\pi^2}{9}} : \pi$, d. i. $\sqrt[3]{6\pi^2} : \pi$, oder, in Zahlen ausgedrückt, wie 3,89779 zu 3,1415..., also beinahe wie 4 zu 3.

Zusatz. Nimmt man im Gegentheil gleiche Oberflächen beider Körper an, so ergiebt sich das nämliche Verhältniß, aber in umgekehrter Gestalt, d. h. es verhält sich der Würfel zur Kugel wie π zu $\sqrt[3]{6\pi^2}$.

11) Wenn der Kegel, die Kugel und der Cylinder, so wie diese Körper oben (§ 197, Zusatz 4.) betrachtet worden sind, sich zu einander verhalten wie 1, 2, 3; wie verhalten sich ihre Gesammtoberflächen zu einander?

Antwort. Wie $\sqrt{5} + 1$, 4, 6 oder wie (3,236068), 4,6.

12) Wenn aber alle drei Körper gleichen Rauminhalt haben und die Höhe des Kegels wie die des Cylinders gleich ist dem Durchmesser seiner Grundfläche; wie verhalten sich dann ihre Gesammtoberflächen zu einander?

Auflös. Der Durchmesser des Kegels wie seine Seitenlinie sei $= 2\,x$, so ist seine Höhe $= \sqrt{4x^2 - x^2} = x\sqrt{3}$, und die Grundfläche $= x^2\,\pi$, also sein Inhalt $= \frac{x^3\,\pi\sqrt{3}}{3}$; der Inhalt der Kugel ist $= \frac{4}{3}\,r^3\,\pi$, wenn r den Radius bedeutet, also soll sein $\frac{x^3\,\pi\sqrt{3}}{3} = \frac{4}{3}\,r^3\,\pi$, woraus folgt $x = r\sqrt[3]{\frac{4}{3}\sqrt{3}}$, also

1) $\sqrt[3]{x^2} = r^2\sqrt[3]{\frac{16}{3}}$.

Der Durchmesser des Cylinders wie seine Höhe sei $= 2\,y$, so ist sein Inhalt $= y^2\,\pi\,.\,2\,y = 2\,y^3\,\pi$, also auch $2\,y^3\,\pi = \frac{4}{3}\,r^3\,\pi$, woraus man erhält $y = r\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$, daher 2) $y^2 = r^2\sqrt[3]{\frac{4}{9}}$.

Nun ist die Gesammtoberfläche des Kegels $= x\,\pi\sqrt{x^2 + 3\,x^2} + x^2\,\pi = 3\,x^2\,\pi$,
des Cylinders $= 2\,y\,\pi\,.\,2\,y + 2\,.\,y^2\,\pi$ .... $= 6\,y^2\,\pi$,
und der Kugel.................................. $= 4\,r^2\,\pi$.

Setzt man nun statt x^2 und y^2 die entsprechenden Werthe aus 1 und 2, so ergiebt sich nach gehöriger Abkürzung das Verhältniß der Oberflächen des Kegels, des Cylinders und der Kugel: $\sqrt[3]{18}$, $\sqrt[3]{12}$, 2.

13) Es sei in einen geraden Kegel, dessen Seitenlinie dem Durchmesser seiner Grundfläche gleiche, eine Kugel beschrieben; man verlangt das Verhältniß beider Körper ihrem Volumen und ihren Oberflächen nach.

Auflösung. Es sei die Seitenlinie so auch der Durchmesser der Grundfläche des Kegels $= 2\,R$, so ist seine Grundfläche $= R^2\,\pi$ und Höhe $= \sqrt{4\,R^2 - R^2} = R\sqrt{3}$, also

1) sein Volumen $= R^2\,\pi\,.\,\frac{1}{3}\,R\sqrt{3} = \frac{R^3\,\pi\sqrt{3}}{3}$, und

krumme Oberfläche $= R\,\pi\sqrt{3\,R^2 + R^2} = 2\,R^2\,\pi$, mithin

2) seine Gesammtoberfläche $= 2\,R^3\,\pi + R^2\,\pi = 3\,R^2\,\pi$.

Der Halbmesser der Kugel sei $= r$, so ist ihr Inhalt $= \frac{4}{3}\,r^3\,\pi$, und ihre krumme Oberfläche $= 4\,r^2\,\pi$.

Es soll nun zunächst R in Werthen von r ausgedrückt werden.

Die Seitenlinien so wie der Durchmesser des Kegels sind sonach Tangenten der Kugel, und der Berührungspunkt in der Mitte einer jeden.

Denkt man sich ferner aus der Spitze des Kegels einen Schnitt durch die Achse, so ist derselbe ein gleichseitiges Dreieck und der Schnitt durch die Kugel ein in dasselbe beschriebener größter Kreis derselben.

Der Inhalt dieses Dreieckes ist $= R^2 \sqrt{3}$, (§ 104, Aufg. 10.); es ist aber auch $R^2 \sqrt{3} = 3.2\,R.\frac{1}{2}\,3\,Rr$, folglich $R = r\sqrt{3}$. Setzt man diesen Werth in die Gleichungen 1) und 2), so erhält man

$$\frac{R^3 \pi \sqrt{3}}{3} = 3\,r^3 \pi, \text{ und } 3\,R^2 \pi = 9\,r^2 \pi.$$

Der Kegel verhält sich also zur Kugel wie $3\,r^3 \pi : \frac{4}{3}\,r^3 \pi$, d. i. wie $3 : \frac{4}{3}$ oder wie $9 : 4$.

Die Oberflächen des Kegels verhalten sich zu der Oberfläche der Kugel wie $9\,r^2 \pi : 4\,r^2 \pi$ oder wie $9 : 4$, also dasselbe Verhältniß.

Bemerkung. Wegen $3.2\,R.\frac{1}{2}\,r = 3\,Rr$ denke man sich vom Mittelpunkte des Kreises nach den Winkelpunkten des Dreieckes gerade Linien gezogen, so theilen diese das Dreieck in 3 gleichschenkelige congruente Dreiecke, die den Halbmesser r zur Höhe und die Seitenlinien 2 R zu Grundlinien haben.

14) Der mittlere scheinbare Durchmesser des Mondes, d. h. der Winkel, den zwei von unserem Auge bis an die Endpunkte seines Durchmessers vorgestellte Linien bilden, beträgt ungefähr ½ Grad. Denkt man sich nun die uns sichtbare Hälfte des Himmelsgewölbes mit lauter Vollmonden oder einem durchgehends gleichförmig lichten Gewölk bedeckt, deren jeder Theil, von der Größe der Mondscheibe, an Lichtstärke der des Vollmondes gleich ist; wie vielmal wird von dieser Helligkeit das nächtliche Licht des Vollmondes übertroffen?

Auflösung. Man hat zu untersuchen, aus wie viel Mondscheiben die Fläche des halben scheinbaren Himmelsgewölbes besteht, mithin obige Formel $q = 4\,r^2 \pi$, also für diesen Fall $\frac{1}{2}\,q = 2\,r^2 \pi$ darauf anzuwenden. Da aber der Halbmesser nicht gegeben ist, so hat man die Peripherie einzuführen. Wegen $2\,r\pi = p$ ist also $r = p : 2\,\pi$, und die Einsetzung dieses Werthes in obige Formel giebt $\frac{1}{2}\,q = \frac{p^2}{2\,\pi}$.

Nun gehen auf einen größten Kreis der Himmelskugel 2.360 an einander gereihete Mondscheiben, also ist $p = 2.360$, folglich

$$\frac{1}{2}\,q = \frac{360.360.2}{\pi} = 82507 \text{ Monde.}$$

Der hier angenommene Schein des bewölkten Himmels ist demnach mehr als 80tausendmal heller als das Licht des Vollmondes.

Bemerkung. Man nimmt an, daß die Tageshelle bei einem mit dünnem Gewölk überzogenen Himmel, von welchen aber die Sonne verdeckt wird, obiger Helligkeit gleich kommt.

15) Den geraden Kegel durch einen mit der Grundfläche parallelen Schnitt in zwei gleiche Theile zu theilen.

Auflösung. Es sei die Höhe des Kegels $= h$, der Halbmesser der Grundfläche $= R$, der Halbmesser des parallelen Schnittes $= x$, und der Abstand desselben von der Grundfläche $= z$, so ist die Höhe des oberen ebenen Theiles $= h - z$.

Sonach ist $h : R = (h - z) : x$, also $h - z = \frac{hx}{R}$.

$$\text{daher } z = h - \frac{hx}{R}.$$

Die Aufgabe ist dann gelöst, wenn der Abstand z gefunden ist.

Nun ist der Inhalt des ganzen Kegels $= \frac{R^2 \pi h}{3}$, und der Inhalt des über dem parallelen Schnitt liegenden Theils $= \frac{n^2 \pi . (h - z)}{3}$; daher soll werden $\frac{x^2 \pi . (h - z)}{3} = \frac{R^2 \pi h}{3} . \frac{1}{2}$, oder $x^2 (h - z) = \frac{R^2 h}{2}$.

Setzen wir in der Gleichung rechter Hand statt $h - z$ den obigen Werth $\frac{hx}{R}$, so ist $x^2 . \frac{hx}{R} = \frac{R^2 h}{2}$, d. i. $x^3 = \frac{R^3}{2}$, also $x = \frac{R}{\sqrt[3]{2}}$.

Substituiren wir diesen Werth von k in obige Gleichung $z = h - \frac{hx}{R}$, so folgt $z = h - \frac{h}{R} . \frac{R}{\sqrt[3]{2}} = \left(1 - \frac{\sqrt[3]{4}}{2}\right) h$.

16) Die gerade Pyramide auf dieselbe Art zu theilen.

Auflösung. Es sei die Höhe der Pyramide $= h$, der Quadratinhalt ihrer Grundfläche $= A$, der parallele Durchschnitt $= x$ ebenfalls dem Quadratinhalte nach, der Abstand beider Flächen $= z$, so ist die Höhe des spitzen Theils $= h - z$, also ist $h^2 : (h - z)^2 = A : x$, also (1) $h - z = h \sqrt{\frac{A}{x}}$, daher (2) $z = h - h \sqrt{\frac{x}{A}}$.

Nun ist der Inhalt der ganzen Pyramide $= \frac{Ah}{3}$, und der Inhalt des über x liegenden Theils $= \frac{x (h - z)}{3}$; es soll also werden

$$\frac{x (h - z)}{3} = \frac{Ah}{3} . \frac{1}{2}, \text{ oder } x (h - z) = \frac{Ah}{2}.$$

Man setze nun in der Gleichung zur Rechten statt $h - z$ seinen obigen Werth aus (1) so ist $x h \sqrt{\frac{x}{A}} = \frac{Ah}{2}$, oder $x \sqrt{\frac{x}{A}} = \frac{A}{2}$.

Erhebt man beide Seiten der letzteren Gleichung zum Quadrat, so folgt $\frac{x^3}{A} = \frac{A^2}{4}$, oder $x^3 = \frac{A^3}{4}$, also $x = \frac{A}{\sqrt[3]{4}}$.

Die Einsetzung dieses Werthes in obige Gleichung (2) giebt

$$z = b - h \sqrt{\frac{1}{\sqrt[3]{4}}}, \text{ oder nach gehöriger Abkürzung}$$

$$z = \left(1 - \frac{\sqrt[6]{16}}{2}\right) h = \left(1 - \sqrt{\frac{\sqrt[3]{16}}{2}}\right) h \text{ (s. Algebra S. 71).}$$

17) Den abgestumpften geraden Kegel in zwei gleiche Theile zu theilen.

Auflösung. Es sei der Halbmesser der untern Grundfläche = R, der oberen = r, der Halbmesser des parallelen Schnitts = x, der Abstand desselben von der unteren Grundfläche = z, die Höhe = h, so ist die Höhe des oberen Theils = h — z, also

$$h : (R - r) = (h - z) : (x - r), \text{ oder } h - z = \frac{h(x-r)}{R - r}.$$

Nun ist der Inhalt des ganzen abgestumpften Kegels $= \frac{(R^2 + Rr + r^2)\pi h}{3}$, und der des oberen Theils $= \frac{(x^2 + xr + r)\pi(h - z)}{3}$.

Es soll nun werden $\frac{(x^2 + xr + r^2)\pi(h - z)}{3} = \frac{(R^2 + Rr + r^2)\pi h}{3.2}$; also ist $(x^2 + xr + r^2)(h - z) = \frac{(R^2 + Rr + r^2) h}{2}$.

Setzt man statt h — z seinen Werth, so ergiebt sich

$$(x^2 + xr + r^2)\frac{(x - r) h}{R - r} = \frac{(R^2 + Rr + r^2) h}{2},$$

daher $(x^2 + xr + r^2)(x - r) = \frac{(R^2 + Rr + r^2)(R - r)}{2}$.

Die Ausführung der Multiplikation auf beiden Seiten giebt

$$x^3 - r^3 = \frac{R^3 - r^3}{2},$$

also $x^3 = \frac{R^3 + r^3}{2}$, und $x = \sqrt[3]{\frac{R^3 + r^3}{2}}$,

endlich $z = \left(R - \sqrt[3]{\frac{R^3 + r^3}{2}}\right) \frac{h}{R - r}$.

18) Die abgestumpfte gerade Pyramide, deren Grundflächen Quadrate sind, eben so zu theilen.

Auflösung. Die Seite der unteren Grundfläche sei $= a$, der oberen $= b$, der Abstand beider Flächen $= h$ und der Abstand des parallelen Durchschnittes $= z$, so erhält man nach gehöriger Ausführung

$$z = \left(a - \sqrt[3]{\frac{a^3 + b^3}{2}}\right) \frac{h}{a - b},$$

also ein ähnlicher Ausdruck wie beim abgestumpften Kegel.

19) Den Inhalt eines Kugelstückes zu finden, welches zwischen zwei parallelen Kreisflächen enthalten also von einer Zone umgeben ist, wenn die eine Kreisfläche durch den Mittelpunkt der Kugel geht.

Auflösung. Man ziehe den Abschnitt, der mit dem Kugelstücke gleichen Abstand vom Mittelpunkte hat, von der Halbkugel ab, so bleibt das verlangte Kugelstück übrig (§ 201, Zus. 3.)

20) Unter vorigen Bedingungen den Inhalt eines Kugelstücks zu finden, wenn die Kreisflächen bestimmte Abstände vom Mittelpunkte haben.

Auflösung. Es sei k f e q das gesuchte Kugelstück (Fig. 162, Seite 130), und sein Abstand $g\,b = k$, so ist erstens das Stück a f e d, welches N heißen soll, $N = \frac{2}{3} r^3 \pi - \pi (r - k)^2 .]r - \frac{1}{3} (r - k)]$, wo $r - k = h = c\,g$ ist (§ 201, Zus. 3).

Zweitens ist das Stück a k q d, welches ich mit N^1 und seinen Abstand l b mit k^1 bezeichne, $N^1 = \frac{2}{3} r^3 \pi - \pi (r - k^1)^2 . [r - \frac{1}{3} (r - k^1)]$, wo $r - k^1 = c\,l$ ist.

Subtrahirt man ersteren Werth von letzteren, so erhält man für das gesuchte Kugelstück den Werth $(r - k^1)^2 . (2\,r + k^1) \frac{1}{3} \pi - (r - k)^2 . (2\,r + k) . \frac{1}{3} \pi$, oder nach gehöriger Abkürzung den Ausdruck $[3\,r^2 - (k^{12} + k^1\,k + k^2)]\,(k^1 - k) . \frac{1}{3} \pi$.

Für $r = 8$, $k^1 = 7$, $k = 5$ Zoll erhält man $k\,f\,e\,q = 173{,}746..$ Cubikzoll.

21) Es sind n gerade Cylinder von gleicher Grundfläche und Höhe gegeben; man will einen dritten geraden Cylinder von derselben Höhe verfertigen, dessen krumme Oberfläche den krummen Oberflächen der n gegebenen Cylinder zusammengenommen gleich sei. Wie vielmal ist dieser Cylinder größer als jeder der gegebenen?

Auflösung. Der gesuchte Cylinder sei $= C$, seine Höhe $= h$ und krumme Oberfläche $= b$, so ist

$C = \frac{b^2}{4 \pi h}$ (S. 111, Aufg. 4). Einer der gegebenen Cylinder sei $= c$,

Höhe $= h$ und Halbmesser $= r$, so ist $c = y^2 \pi h$, die krumme Oberfläche $= 2 r \pi h$, also die krumme Oberfläche aller Kegel zusammen genommen $= 2 n r \pi h$.

Setzt man diesen Werth statt b in obige Gleichung, so folgt $C = n^2 r^2 \pi h$. Dieser Cylinder ist also n^2mal größer als jeder der gegebenen, oder nmal größer als alle zusammengenommen, weil der Cubikinhalt aller zusammen $= n . r^2 \pi h$ ist.

Zusatz. Was hier von dem körperlichen Inhalt gesagt ist, gilt auch den Grundflächen.

22) Wenn aber ein Cylinder verlangt wird, dessen krumme Oberfläche der Summe der Oberflächen der n gegebenen Cylinder, als auch dessen Grundfläche der Summe der Grundflächen derselben gleich sein soll; wie wird dann sein Inhalt und seine Höhe ausfallen?

Auflösung. Der verlangte Cylinder sei $= C$, sein Halbmesser $= x$ und Höhe $= z$, so ist $C = x^2 \pi z$, und seine krumme Oberfläche $= 2 x \pi z$.

Die Summe aller Grundflächen der n Cylinder ist $= n r^2 \pi$, und ihrer krummen Oberflächen $= 2 n r \pi h$.

Nun soll werden erstens $x^2 \pi = n r^2 \pi$, woraus folgt 1) $x = r \sqrt{n}$; und zweitens $2 x \pi z = 2 n r \pi h$, daher ist auch 2) $x = \frac{n r h}{z}$.

Aus 1) und 2) folgt $z = h \sqrt{n}$ als die Höhe.

Die Gleichung $C = x^2 \pi z$ wird daher $C = r^2 \pi h n \sqrt{n}$.

23) Den körperlichen Inhalt eines Tetraeders aus dessen Seite zu finden.

Auflösung. Das Tetraedrum stellt eine Pyramide vor, dessen Grundfläche ein gleichseitiges Dreieck und einer jeden der Seitenflächen gleich ist. Es sei nun die Seite $= a$, so ist die Grundfläche $= \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$. Die Höhe derselben trifft den Mittelpunkt eines um die Grundfläche beschriebenen Kreises, dessen Halbmesser $= \frac{a}{\sqrt{3}}$ ist (vergl. Aufg. 13, Seite 136).

Dieser Halbmesser und die Höhe sind die Katheten eines rechtwinkeligen Dreiecks, dessen Hypotenuse die Seitenlinie a ist; also ist die Höhe $= a \sqrt{\frac{2}{3}}$. Folglich der Inhalt des Tetraeders $= \frac{1}{12} a^3 \sqrt{2}$.

24) Den Inhalt des Octaeders aus dessen Seite zu finden.

Auflösung. Das Octaeder läßt sich in zwei congruente vierseitige Pyramiden zerlegen, deren Grundfläche bei einiger Ueberlegung leicht gefunden werden kann.

Es sei nämlich die Seite des Octaeders $= a$, so ist die Grundfläche einer solchen Pyramide $= a^2$, ihre Höhe nach vorhergehender Aufgabe $= \frac{a \sqrt{2}}{2}$, daher ihr Inhalt $= \frac{1}{6} a^3 \sqrt{\frac{1}{2}}$; folglich das Octaeder $= \frac{1}{3} a^3 \sqrt{2}$,

25) Man will aus einer Metallcomposition, von welcher der Cubikfuß 60 Pfund wiegt, eine hohle Kugel, die 24 Pfund schwerer wiegen und deren Halbmesser $= 8$ Zoll werden soll, verfertigen; wie dick muß die Schale dieser Kugel werden?

Aufl. Der Cubikzoll dieser Composition wiegt $\frac{60}{1728} = \frac{5}{144}$ Pfund, wenn Duodecimalmaß gerechnet wird; also 24 Pfund nehmen $\frac{24.144}{5} = 691{,}2$ Cubikzoll Raum ein, welches der Cubikinhalt der Schale ist. Bezeichnet nun x den Halbmesser des leeren Raums, so ist $\frac{4}{3}\pi (8^3 - x^3) = 691{,}2$; folglich $x^3 = 512 - \frac{691{,}2.3}{4\pi}$, also $x = \sqrt[3]{346{,}9} = 7$ Zoll nahe, daher $8 - 7 = 1$ Zoll die Dicke der Schale.

26) Was für einen Halbmesser muß eine kupferne hohle Kugel, die 1 Pfund schwer sein soll, bekommen, um im Wasser zu schweben? Wie groß muß der Halbmesser des hohlen Raums und wie dick das Kupfer sein?

Die Kugel verliert von ihrem Gewicht so viel, als die Menge Wasser, welches sie verdrängt. Dieser hydrostatische Satz muß hier nothwendig als bekannt vorausgeschickt werden.

Aufl. Die Kugel muß ein Volumen gleich dem eines Pfundes Wassers bekommen. Das Volumen eines Pfundes Wasser ist

$$= \frac{7680}{330{,}94} = \frac{3840}{165{,}47} \text{ Cubikzoll.}$$

Setzt man den Halbmesser der Kugel $= r$, so muß $\frac{4}{3} r^3 \pi = \frac{3840}{165{,}47}$ sein, woraus $r = \sqrt[3]{\frac{3.3840}{165{,}47 \,.\, 4}} = 2{,}8088\ldots$ Zoll sich ergiebt.

Das Volumen eines Pfundes Kupfer ist $= \frac{3840}{8{,}897 \,.\, 165{,}47}$, folglich das Volumen des hohlen Raums der Kugel

$$= \frac{3840}{165{,}47} - \frac{3840}{8{,}867 \,.\, 165{,}47} = \frac{3840 \,.\, 7{,}897}{165{,}47 \,.\, 8{,}897}.$$

Nun sei der Halbmesser des hohlen Raums $= r'$, so muß sein

$$\tfrac{4}{3} r'^3 \pi = \frac{3840 . 7{,}897}{165{,}47 . 8{,}897},$$

daraus ergiebt sich $r' = \sqrt[3]{\frac{3840 . 7{,}897 . 3}{165{,}47 . 8{,}897 . 4\pi}} = 1{,}7005.$

Die Dicke des Kupfers ist $= 2{,}8088 - 1{,}7005 = 1{,}108$ Zoll.

Dritter Theil.

Die Trigonometrie.

§ 203. Die Trigonometrie oder Dreieckmeßkunst hat den Zweck, aus gewissen gegebenen Stücken eines Dreiecks, unter welchen seine Seiten und Winkel zu verstehen sind, das eine oder das andere der übrigen Stücke durch Rechnung zu finden. Die eigentliche Geometrie hingegen sucht diese Stücke unmittelbar durch Construction.

§ 204. Der Auflösung ihrer Aufgaben legt die Trigonometrie gewisse Hülfsmittel zum Grunde, die unter dem Namen der trigonometrischen Linien verstanden werden. Dies sind gerade Linien, die in gegenseitigem Verhältnisse stehen und von der Größe eines gewissen Winkels abhängig sind.

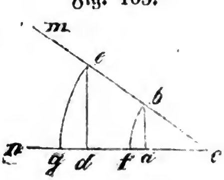
§ 205. Man unterscheidet zweierlei Arten von Dreiecken, ebene und sphärische oder Kugel-Dreiecke. Die ersteren sind dieselben Dreiecke, welche die Planimetrie zum Gegenstande hat; die letzteren hingegen werden von drei Bogen größter Kreise einer Kugel eingeschlossen.

§ 206. Hiernach wird die Trigonometrie in die ebene und sphärische eingetheilt; jene handelt also von der Ausmessung ebener, diese von der Ausmessung sphärischer Dreiecke.

Erster Abschnitt.

Von den trigonometrischen Linien.

Fig. 163.



§ 207. Es sei c (Fig. 163) ein ebener Winkel, aber kleiner als ein rechter. Man fälle aus irgend einem Punkte b des Schenkels cm ein Perpendikel ba auf den andern Schenkel cn, so wird ba größer oder kleiner sein, je nachdem der Winkel c größer oder kleiner ist. Fällt man aus einem andern, von c entferntern Punkte, e, ein Perpendikel ed auf cn, so wird zwar ed größer als ba sein, aber ab

steht zu bc in demselben Verhältniß, wie de zu ec. Denn wenn z. B. ab der dritte Theil von bc ist, so muß auch de der dritte Theil von ec sein.

§ 208. Nimmt man bc und ec jedes als Halbmesser eines Kreises, so stehen diese Perpendikel auch in demselben Verhältniß zu den entsprechenden Halbmessern und sind bestimmte Theile derselben.

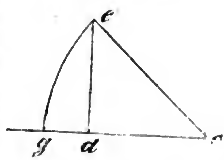
Wird der Winkel größer oder kleiner, so werden auch diese Perpendikel zu- oder abnehmen, aber immer in einerlei Verhältniß zu ihren Halbmessern bleiben.

§ 209. Durch dieses Perpendikel wird daher nach Verhältniß des Halbmessers die Größe des Winkels bestimmt; oder auch umgekehrt läßt sich das Perpendikel, nach einem gegebenen Halbmesser, durch die Größe des Winkels bestimmen.

§ 210. Das Perpendikel ba heißt daher, in Rücksicht seines Verhältnisses zum Halbmesser, der Sinus des Winkels c. Der Sinus hängt immer von dem Radius des Kreises ab. Ebenso ist de der Sinus des Winkels c, wenn ec für den Radius angenommen wird.

ba heißt auch der Sinus des Bogens bn, weil dieser das Maß des Winkels c ist. Denn so wie die Größe des Bogens mit der Größe des Winkels zu- oder abnimmt, so hängt auch die Größe des Perpendikels von der Größe des Bogens ab.

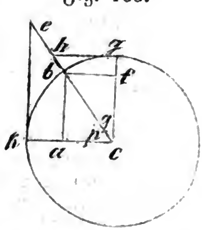
Fig. 164.



In Fig. 164 stellt ge einen größern Bogen vor, als in vorhergehender, also ist auch der Sinus ed größer als dort, obgleich der Radius ce von derselben Größe sein soll.

§ 211. Der Sinus ist aber nicht das einzige Hülfsmittel zur Bestimmung der Größe eines Winkels. Dies erhellt sogleich aus dem Folgenden.

Fig. 165.



Es sei (Fig. 165) ba der Sinus des Winkels p oder des Bogens bk für den Radius bc. Verlängert man diesen Radius nach e hin und errichtet aus dem Endpunkte k des Halbmessers ck eine Senkrechte, die man so weit verlängert, bis sie den ebenfalls verlängerten Radius oder Schenkel des Winkels in e schneidet, so muß auch dieses Perpendikel größer oder kleiner werden, je nachdem der Winkel p zu- oder abnimmt. Also ist das Verhältniß desselben zu dem Schenkel ce oder zu dem Radius cb durch die Größe des Winkels p oder des Bogens kb bestimmt.

Das Verhältniß bleibt auch hier für einen bestimmten Bogen oder Winkel immer dasselbe, wie groß auch der Radius genommen werde.

§ 212. Dieses Perpendikel ke heißt in Bezug auf sein Verhältniß zum Halbmesser oder zu dem verlängerten Radius ce, die Tangente des Winkels p, und zwar die trigonometrische Tangente. Sie unterscheidet sich also von der geometrischen dadurch, daß sie von einer bestimmten, vom Radius abhängigen Größe ist.

§ 213. Die Größe der Linie c e ist ebenfalls von der Größe des Winkels oder Bogens abhängig, so wie die Tangente k e oder der Sinus a b; folglich wird auch das Verhältniß derselben zum Halbmesser durch die Größe des Winkels oder des Bogens bestimmt.

Diese Linie heißt, mit Rücksicht ihres Verhältnisses zum Halbmesser, die Secante des Winkels p oder des Bogens k b. Tangente und Secante schneiden oder treffen also einander.

Ergänzungswinkel (Complement).

§ 214. Wenn der Winkel p kleiner als ein rechter ist, so läßt sich noch ein zweiter q mit ihm verbinden, der mit ihm zusammen = R ist.

Der Winkel q heißt alsdann der Ergänzungswinkel oder das Complement von p. Es kann aber auch eben so gut der Winkel p das Complement von q sein.

Der Winkel, von welchem der eine das Complement ist, heißt der Hauptwinkel. — Es kommt hier darauf an, von welchem Gesichtspunkte man beide Winkel betrachtet.

§ 215. Im Ergänzungswinkel von p ist b f der Sinus, h g die Tangente und c h die Secante des Winkels q oder des Bogens b g; denn diese Linien geben für den Winkel q oder den Bogen b g die nämliche Beziehung an, wie a b, k e und c e für den Winkel p.

§ 216. Der Ergänzungswinkel und der Hauptwinkel hängen aber gegenseitig von einander ab; denn so wie der eine größer wird, nimmt der andere ab; folglich hängt auch der Sinus, die Tangente und die Secante des Winkels q von dem Winkel p ab, und so umgekehrt; denn z. B. der Sinus des Winkels q wird eben so wohl durch den Winkel p bestimmt, als der Sinus des Winkels p durch den Winkel q.

§ 217. Der Sinus, die Tangente und die Secante des Ergänzungswinkels q heißen aber in Beziehung auf den Hauptwinkel p oder auf den Bogen b k, dessen Cosinus, Cotangente und Cosecante.

In vorstehender Figur ist also b f der Cosinus, h g die Cotangente und c h die Cosecante des Winkels p oder des Bogens b k.

§ 218. Da a c = b f ist, so heißt auch a c der Cosinus des Winkels p. Die genannten Linien, deren Verhältniß zum Halbmesser durch die Größe eines Bogens oder Winkels bestimmt wird, nämlich: der Sinus, die Tangente, die Secante, der Cosinus, die Cotangente und Cosecante sind unter dem Namen der trigonometrischen Linien begriffen.

Zu diesen Linien gehören eigentlich auch noch der Sinus versus und der Cosinus versus. a k heißt der Sinus versus und f g der Cosinus versus des Winkels p. Es wird aber selten von beiden Linien Gebrauch gemacht. (Siehe weiter unter.)

Zu- und Abnahme der Winkel.

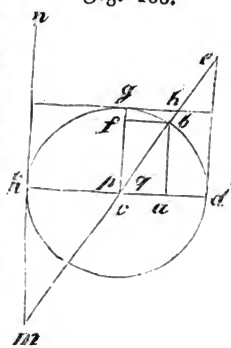
§ 219. Wenn sich ein Winkel ändert, so ändern sich zugleich alle trigonometrischen Linien. Man denke sich, der Winkel p habe bis auf Null abgenommen, so ist auch der Sinus und die Tangente = Null; die Secante aber = c g d. i. gleich dem Radius. So wie nun der

Winkel p oder der Bogen b d wächst, so nehmen auch die drei Linien, jedoch jede in einem andern Verhältniß, zu; denn die Tangente und die Secante wachsen viel schneller und immer schneller als der Sinus, und wenn p = 1 R wird, so ist der Sinus b a = c g gleich dem Halbmesser; die Tangente und Secante aber, die alsdann beide auf c d senkrecht stehen, folglich parallel laufen, sind unendlich groß; die Cotangente und der Cosinus sind aber = Null und die Cosecante c h dem Halbmesser gleich geworden.

§ 220. Nimmt der Winkel p oder der Bogen b d wieder ab, so wird die Cotangente g h und die Cosecante c h immer größer, und ist p = 0 geworden, so stehen beide Linien auf c g senkrecht, folglich laufen sie parallel und sind gleichfalls, so wie vorher Tangente und Secante, unendlich groß; aber der Cosinus b f und die Secante c e sind dem Halbmesser c k gleich geworden; Sinus, Tangente und Secante nehmen also zu, wenn der Winkel p zunimmt, hingegen nehmen Cosinus, Cotangente und Cosecante ab, und so umgekehrt. Diese Linien bestimmen sich also gegenseitig.

§ 221. Man nehme nun an, k d sei ein feststehender Durchmesser und die Zunahme des Winkels p entstehe durch die Umdrehung des Radius c b um den Punkt c (Fig. 166). Dieser Radius soll in dieser Beziehung der Radius Vector heißen. Ferner sei m n eine feststehende Linie und heiße die Tangentenlinie des Winkels p; imgleichen sei r s eine feststehende Linie und werde die Cotangentenlinie des Winkels p genannt, weil in vorhergehender Figur die Tangente und Cotangente in dieser Linie liegen.

Fig. 166.



§ 222. Der Winkel p sei nun größer als ein rechter und = k c b geworden; nun fragt es sich, welches seine trigonometrischen Linien sind. Der Sinus nämlich ist immer das Perpendikel, welches aus dem Punkte b, wo der Radius Vector den Kreis schneidet, auf den feststehenden Durchmesser k d gefällt ist; folglich ist b a der Sinus des Winkels p oder des Bogens k g b; b a ist aber auch der Sinus des Winkels q. Daher der bemerkenswerthe Satz: **Nebenwinkel haben einerlei Sinus.**

§ 223. Die Tangente des Winkels p ist aber nicht d e; denn die Tangente muß immer in der Tangentenlinie m n liegen und von dem verlängerten Radius Vector geschnitten werden. Da aber derselbe nicht vorwärts, sondern rückwärts verlängert in m die Tangentenlinie schneidet, so ist k m die Tangente des Winkels p oder des Bogens k g b.

Da Tangente und Secante einander immer schneiden müssen, so ist auch nicht c e, sondern c m die Secante des Winkels p.

§ 224. Was den Cosinus, die Cotangente und Cosecante des stumpfen Winkels p betrifft, so hat man darunter den Sinus, die Tangente und Secante desjenigen Winkels zu verstehen, um welchen der stumpfe größer

als ein rechter ist, d. i. des Winkels gcb. Daher ist fb = ca der Cosinus, gh die Cotangente und ch die Cosecante des Winkels p oder des Bogens kgb.

Auch muß die Cotangente, auf ähnliche Art wie die Tangente, immer in der Cotangentenlinie rs liegen und von der Cosecante geschnitten werden.

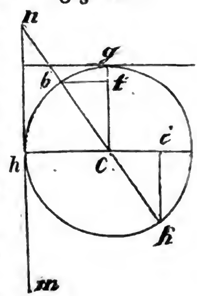
§ 225. Hier zeigt sich, daß der Sinus, die Tangente und Secante des stumpfen Winkels wieder kleiner als die des rechten sind, und daß sie überhaupt immer mehr abnehmen, je größer der stumpfe Winkel wird. Dagegen nehmen Cosinus, Cotangente und Cosecante wieder zu.

Wächst der stumpfe Winkel bis zu zwei rechten, so wird der Sinus und die Tangente = 0, die Secante und der Cosinus gleich dem Radius, die Cotangente und Cosecante unendlich groß.

§ 226. Aus § 222 und 223 geht hervor, daß, wenn ein stumpfer und ein spitzer Winkel zusammen = 2 R sind, die trigonometrischen Linien des einen denen des andern an Größe einander gleich sind, nämlich der Sinus des einen ist gleich dem Sinus des andern; eben so die Tangente des einen gleich der Tangente des andern u. s. w.; sie sind aber in den meisten Fällen ihrer Lage nach von einander verschieden.

§ 227. Man nimmt daher die trigonometrischen Linien des spitzen Winkels durchgehends als positiv; hingegen die Tangente, die Secante, den Cosinus und die Cotangente des stumpfen Winkels als negativ. Denn in Fig. 166 ist die Tangente km des stumpfen Winkels p, der Tangente ke des spitzen Winkels p im ersten Quadranten (Fig. 165) entgegengesetzt, eben so ist die Cotangente gh und der Cosinus fb (Fig. 166), der Cotangente gh und dem Cosinus fb (Fig. 165) entgegengesetzt.

Fig. 167.



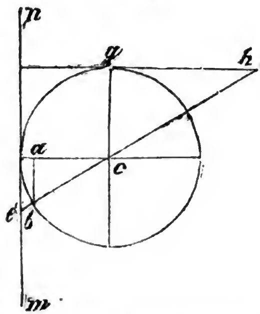
§ 228. Wächst der Winkel p noch über 180° hinaus, geht also der Radius Vector in den dritten Quadranten über und legt den Bogen hgk zurück (Fig. 167.), so ist ik der Sinus und ci der Cosinus dieses Bogens oder entsprechenden Winkels. Der Sinus desselben hat aber jetzt eine der Richtung der Sinus der Winkel im ersten und zweiten Quadranten entgegengesetzte genommen. Er ist also negativ, und der Cosinus, wie im zweiten Quadranten, ebenfalls negativ.

Um die übrigen trigonometrischen Linien zu bestimmen, bedenke man, daß der Radius Vector die Tangentenlinie in zurückgehender Verlängerung und zwar in n trifft; es ist also hn die Tangente und cn die Secante; erstere ist, wie im ersten Quadranten, positiv, letztere dagegen, da sie rückwärts gehend, die Tangente schneidet, negativ.

Die Cotangente ist gd und, wie im ersten Quadranten, positiv; ferner ist cd die Cosecante, aber, aus denselben Gründen wie bei der Secante, negativ. —

Ist der Winkel zu 270 Grad angewachsen, so ist der Sinus dem Radius gleich (aber negativ), der Cosinus ist = o, Tangente und Secante sind unendlich groß, die Cosecante ist dem Radius gleich und die Cotangente = o.

Fig. 168.



§ 229. Ist der Bogen noch größer als 270 Grad z. B. k g b geworden (Fig. 168.), welcher also einem Winkel im vierten Quadranten angehört, so ist b a sein Sinus, der negativ ist; der Cosinus ist c a aber positiv; k e ist die Tangente und c e die Secante; erstere ist negativ, letztere aber positiv, weil der Radius Vector in vorwärtsgehender Verlängerung die Tangentenlinie schneidet; c h ist die Cosecante aber aus demselben Grunde negativ; endlich ist g h die Cotangente und ebenfalls negativ.

Hat nun der Radius Vector alle 4 Quadranten also, wenn er bis k gelangt ist, 360 Grad durchlaufen, so ist der Sinus und die Tangente = o, die Secante und der Cosinus dem Radius gleich; die Cotangente und Cosecante aber unendlich groß geworden.

Man sieht, daß wie im ersten und zweiten Quadranten, auch im dritten und vierten die Tangente und Secante, dann die Cotangente und Cosecante einander immer schneiden müssen.

§ 230. Obgleich, wie oben schon bemerkt ist, der Sinus versus und Cosinus versus in der Anwendung wenig vorkommen, so wird es doch nicht überflüssig sein, diese Linien in den verschiedenen 4 Quadranten näher kennen zu lernen.

Der Sinus versus nämlich ist das Stück des unverrückten Durchmessers (vergl. § 218.), welches zwischen dem Anfangspunkte des Bogens und dem Fußpunkte des Sinus liegt. Eine ähnliche Bestimmung hat der Cosinus versus, wie sich so eben zeigen wird.

Im ersten Quadranten ist k a der Sinus versus und g f der Cosinus versus des Bogens k b (Fig. 165.); im zweiten Quadranten (Fig. 166.) ist k a der Sinus versus und f g der Cosinus versus des Bogens k g b; im dritten Quadranten (Fig. 167.) ist h i der Sinus versus und g z der Cosinus versus des Bogens k g h. — Denkt man sich nämlich g c genugsam verlängert und fällt von h auf diese Verlängerung eine Senkrechte, so trifft diese auf den in der verlängerten liegenden Punkt z. Im vierten Quadranten (Fig. 168.) ist k a der Sinus versus und f y der Cosinus versus des Bogens k f g h — der Punkt y liegt auf der verlängerten f c da, wo auf dieselbe von h eine Senkrechte gefällt wird.

§ 231. Für einen Bogen von 90 Grad ist der Sinus versus dem Radius gleich, der Cosinus versus ist aber = o; von hier nehmen beide Linien beim Wachsen des Bogens noch zu; und für einen Bogen

von 180 Grad ist der Sinus versus dem Durchmesser und der Cosinus versus dem Halbmesser gleich. Von hier nimmt der Sinus versus wieder ab, jener aber zu; und wenn der Bogen 270 Grad geworden, ist der letztere dem Durchmesser, der Sinus versus aber dem Halbmesser gleich. Für den vierten Quadranten ist der Sinus versus gleich Null, jener aber dem Halbmesser gleich geworden.

Bei diesen zwei Linien findet also zwar ein Rückwerden vom Wachsen zum Abnehmen, aber kein Uebergang in die entgegengesetzte Richtung statt. Daher sind die Sinus versus, so auch die Cosinus versus in allen vier Quadranten einstimmig positiv.

Tabellarische Uebersicht über die Lage der trigonometrischen Functionen in den vier Quadranten.

§ 232. Ueberschauen wir nun die vorigen Sätze von (§ 219.) an mit einem Blicke, so zeigt sich, daß die Sinus und Cosecanten, die Cosinus und die Secanten, die Tangenten und die Cotangenten in ihrem Vorzeichen übereinstimmen, und so oft die Größe dieser trigonometrischen Linien die Grenzen: Null und Unendlich erreicht hat, bei fortschreitender Zu- oder Abnahme der Winkel die Vorzeichen in die entgegengesetzten übergehen.

Zur Uebersicht kann folgende Tabelle dienen:

Für Winkel	a	90° + a	180° + a	270 + a
Der Sinus	+ sin a	+ sin a	— sin a	— sin a
Der Cosinus	+ cos a	— cos a	— cos a	+ cos a
Die Tangente	+ tang a	— tang a	+ tang a	— tang a
Die Cotangente	+ cotg a	— cotg a	+ cotg a	— cotg a
Die Secante	+ sec a	— sec a	— sec a	+ sec a
Die Cosecante	+ cosec a	+ cosec a	— cosec a	— cosec a

Es bezeichnet nämlich a einen Winkel im ersten, 90° + a einen im zweiten Quadranten u, s. w., was wohl kaum zu erwähnen nöthig ist.

Anmerkung. Winkel, die größer als zwei rechte sind, kommen in der ebenen Trigonometrie nicht vor.

Gegenseitige Abhängigkeit der trigonometrischen Functionen.

§ 233. Da der Sinus des rechten Winkels unter allen Sinussen der größte und dem Halbmesser gleich ist, von welchem die Größe der

trigonometrischen Linien abhängt, so hat er den Namen Sinus totus erhalten; denselben Namen hat in dieser Beziehung der Halbmesser auch.

Wird der Sinus totus = 1 gesetzt, so müssen alle übrigen Sinusse kleiner als 1, folglich echte Brüche sein.

§ 234. Man nehme einen beliebigen Winkel a c b = x an, so ist b d der Sinus und d c = b g der Cosinus des Winkels x, welches so ausgedrückt wird: b d = sin x und d c = cos x. Betrachtet man nun den Radius des Kreises b c, als den Sinus totus und bezeichnet ihn mit r, so ist

$$1)\quad r^2 = (\sin x)^2 + (\cos x)^2;$$

$$2)\quad \sin x = \sqrt{r^2 - (\cos x)^2};$$

$$3)\quad \cos x = \sqrt{r^2 - (\sin x)^2}.$$

§ 235. Ferner ist A, c d : d b = c a : a h,

d. i. $\cos x : \sin x = r : \operatorname{tang} x$,

folglich $4)\ \operatorname{tang} x = \frac{r \sin x}{\cos x}$,

ingleichen $5)\ \sin x = \frac{\cos x . \operatorname{tang} x}{r}$

und $6)\ \cos x = \frac{\sin x}{\operatorname{tang} x}$.

Nun ist weiter B, c g : g b = c e : e f,

d. i. $\sin x : \cos x = r : \operatorname{cotang} x$,

daher $7)\ \operatorname{cotang} x = \frac{r \cos x}{\sin x}$.

Anmerkung. Die Bezeichnungen tang. und cotang. werden auch oft in tg. und cot. abgekürzt.

Verbindet man die Gleichungen 6) und 7), so ist

$$\operatorname{cotang} x = \frac{r}{\sin x} \cdot \frac{r \sin x}{\operatorname{tang} x},$$

also $8)\ \cot x = \frac{r^2}{\operatorname{tg} x}$,

daraus folgt $9)\ \operatorname{tg} x = \frac{r^2}{\cot x}$,

$$10)\quad r^2 = \operatorname{tg} x \cot x.$$

Diese Formeln können als die Grundformeln der trigonometrischen Funktionen betrachtet werden, weil, wie wir ferner sehen werden, noch mehrere andere Formeln daraus abgeleitet werden können.

Man vergleiche weiter unten die trigonometrischen Tafeln.

Zweiter Abschnitt.

Von der Ausmessung der Dreiecke.

§ 236. Unter Ausmessung der Dreiecke ist hier vielmehr die Auffindung gewisser Theile, Seiten und Winkel, als die eigentliche Ausmessung der Dreiecke zu verstehen, obgleich letzterer Fall eben so wohl vorkommt.

§ 237. Wenn von den Seiten und Winkeln eines Dreiecks je drei Stücke gegeben sind, unter denen aber wenigstens eine Seite sein muß, so lassen sich die übrigen Stücke daraus finden. Dies geht aus dem, was oben über die Dreiecke gesagt ist, hervor.

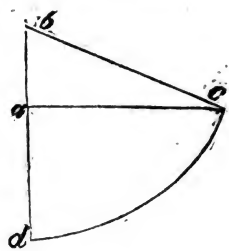
§ 238. Die Ausmessung der rechtwinkeligen Dreiecke ist weit einfacher, als die der schiefwinkeligen, daher wollen wir erstere zunächst betrachten.

I. Von der Ausmessung rechtwinkeliger ebener Dreiecke.

§ 239. Bei dem rechtwinkeligen Dreieck brauchen außer dem rechten Winkel nur zwei Stücke gegeben zu sein, unter denen aber wenigstens eine Seite sein muß.

§ 240. Es sei a b c (Fig. 169) ein rechtwinkeliges Dreieck, und gegeben: eine Seite und ein Winkel, und zwar

Fig. 169.



A) die Hypotenuse b c und der Winkel c, und es werden gesucht die Kathete a b, so steht die Hypotenuse b c in demselben Verhältniß zur Kathete b c, wie der Radius des Kreises oder der Sinus totus r zum Sinus von c. Man hat daher folgende Proportion:

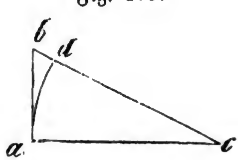
$$bc : ab = r : \sin c,$$

folglich $$ab = \frac{bc \cdot \sin c}{r}$$

und 1) $$\log ab = \log bc + \log \sin c - \log r.$$

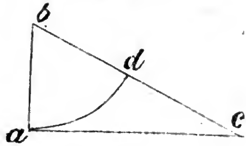
Erläuterung. Da durch den Winkel c zugleich der Winkel b als sein Complement bestimmt und es daher einerlei ist, welcher von beiden gegeben ist, so bietet diese Aufgabe noch eine zweite Auflösung dar: wenn man nämlich b als den gegebenen Winkel annimmt, so steht die Hypotenuse b c in demselben Verhältniß zur Seite b c, wie der Ra-

Fig. 170.



dius r zum Cosinus des Winkels b. Daher hat man jetzt diese Proportion:

Fig. 171.



$$bc : ab = r : \cos b$$

$$\text{folglich} \quad ab = \frac{bc \,.\, \cos b}{r}$$

$$\text{und} \quad 2)\ \log ab = \log bc + \log \cos b - \log r.$$

Anmerk. 1. Durch letztere Formel wird also die Seite ab vermittelst der Hypotenuse und des Cosinus des Ergänzungswinkels c gefunden. Will man daher, wenn der Winkel b gegeben ist, bei ersterer Auflösung nach Formel (1) stehen bleiben, so darf man nur den Winkel b von 90° abziehen, wodurch man den Winkel c erhält.

Anmerk. 2. Es ist auch einerlei, welche von den beiden Katheten gesucht wird; man hat daher in den vorhergehenden Formeln, wenn ac gesucht wird, nur sin b statt sin c, und cos c statt cos b zu schreiben.

Anmerk. 3. Zur Erläuterung der Figur kann man, wie bei obiger Aufgabe der Fall ist, die Hypothenuse wie den Radius eines Kreises betrachten, dessen Mittelpunkt der Scheitel des gegebenen Winkels ist, und einen Kreisbogen beschreiben, so wie in den Figuren 164 und 169. Deshalb darf man aber nicht unbedingt die Hypotenuse für den Radius selbst, sondern immer im Verhältniß zu demselben ansehen.

B) Gegeben die Kathete ac und der Winkel c, und gesucht die andere Kathete ab.

Man vergleiche jetzt die gegebene Kathete ac mit dem Radius, nehme denselben aber in dem Sinne, wie in Anmerk. 3 des vorigen Paragr., und schlage den Bogen ad, so verhält sich die Seite ac ebenso zu der Seite ab, wie der Radius des Kreises zur Tangente von c, und daher

$$ac : ab = r : tg\,c, \text{ d. i. } r : tg\,c = ac : ab$$

$$\text{folglich} \quad ab = \frac{ac \,.\, tg\,c}{r}$$

$$\text{und} \quad 3)\ \log ab = \log ac + \log tg\,c - \log r.$$

Anmerk. 4. Es ist auch hier einerlei, welcher von den beiden Winkeln, und welche von den beiden Katheten gegeben ist. Wäre ab gegeben und ac gesucht, so bringe man ab mit dem Halbmesser (Fig. 171) in Verhältniß, und berücksichtige wegen des Winkels b Anmerk. 1 dieses Paragraphen. Dann ist

$$ab : ac = r : tg\,b$$

$$\text{folglich} \quad ac = \frac{ab \,.\, tg\,b}{r},$$

$$\text{und} \quad 4)\ \log ac = \log ab + \log tg\,b - \log r.$$

Wollen wir in dieser Formel statt des Winkels b den Winkel c beibehalten, so dürfen wir nur in Formel (3) durch Versetzung der Glieder die Gleichung für a c bestimmen. (Siehe meine Algebra.) Wir erhalten daher

$$5)\quad \log ac = \log ab - \log tg\, c + \log r.$$

C) Gegeben die Kathete a c und der Winkel b oder c; es soll gesucht werden die Hypotenuse b c, so verhält sich die Hypotenuse b c zu der Kathete a c, wie b c als Radius zu a c als Cosinus von c, oder

$$bc : ac = r : \cos c$$

folglich $$6)\quad bc = \frac{r \,.\, ac}{\cos c}.$$

Oder nach Fig. 169:

$$bc : ac = r : \sin b,$$

folglich $$7)\quad bc = \frac{r \,.\, ac}{\sin b}.$$

Wäre die Kathete a b gegeben, so hätte man sich nach Anmerk. 2 dieses Paragraphen zu richten.

D) Gegeben zwei Seiten, und zwar die Hypotenuse b c und die Kathete a c, und gesucht der Winkel c, so ist

$$bc : ac = r : \cos c,$$

also $$8)\quad \cos c = \frac{r \,.\, ac}{bc}.$$

Wird der Winkel b gesucht, so ist

$$bc : ac = r : \sin b,$$

folglich $$9)\quad \sin b = \frac{r \,.\, ac}{bc}.$$

Wäre die Kathete a b statt a c gegeben, so vergleiche man vorhergehende Anmerkung.

E) Gegeben beide Katheten, und gesucht die beiden Winkel b und c.

Es ist $$ac : ab = r : tg\, c \quad \text{(Fig. 170, S. 150)}.$$

also $$10)\quad tg\, c = \frac{r \,.\, ab}{ac}.$$

Ferner ist $$ab : ac = r : tg\, b$$

folglich $$11)\quad tg\, b = \frac{r \,.\, ac}{ab}.$$

Anmerk. Will man die Hypotenuse trigonometrisch berechnen, so muß man erst einen der daran liegenden Winkel suchen. (§ 240).

Beispiele zur Auflösung ebener rechtwinkeliger Dreiecke.

Vorläufige Bemerkung.

Man hat den Sinus totus zu 10000000000 Theilen angenommen und die übrigen trigonometrischen Linien von 0 bis zu 90° und zwar von Minute zu Minute darnach berechnet, diese Ergebnisse in Tafeln eingetragen und ihnen ihre zugehörigen Logarithmen beigefügt. Diese Logarithmen heißen trigonometrische, sie sind aber übrigens von den gemeinen Logarithmen nicht wesentlich verschieden; denn der Logarithme des Sinus totus ist = 10, also derselbe Logarithme wie bei einer gewöhnlichen Zahl. In einigen Tafeln ist der Sinus totus gleich der Einheit angenommen.

Um Raum zu ersparen, sind in den meisten Tafeln die trigonometrischen Functionen selbst weggelassen und nur ihre entsprechenden Logarithmen angeführt.

Eine Anweisung über die Berechnung der trigonometrischen Linien wird man weiter unten finden.

§ 241. Aufgaben.

1) Die Höhe eines Thurms zu finden, wenn derselbe in einer horizontalen Entfernung von 500 Fuß, unter einem Winkel von 28° 40′ erscheint?

Auflösung. Man setze die Höhe des Thurms = x, so ist nach b, Formel 3,

$$500 : x = r : tg\ 28^\circ\ 40'$$

folglich $$x = \frac{500\ tg\ 28^\circ\ 40'}{r}$$

und $$\log x = \log 500 + \log tg\ 28^\circ 40' - \log r.$$

Es ist $\log 500 = 2{,}6989700$

addirt $\log tg\ 32' 40'' = 9{,}7377714$

$12{,}4367414$

subtrahirt $\log r = 10,$

$2{,}4367414 = \log x.$

Die diesem Logarithmen zugehörige Zahl ist = 273,36; die Höhe des Thurms ist also nahe $273\frac{1}{3}$ Fuß.

Bemerkung. Wie man sich über dergleichen Berechnungen weiter zu unterrichten hat, z. B. über die Bestimmung der Secunden, findet man ebenfalls weiter unten, und übrigens auch gewöhnlich in allen Logarithmen-Tafeln (vergl. die folgenden Beispiele).

2) Eine Vogelstange sei 75 Fuß hoch und vom Schußorte 125 Fuß entfernt, und die Höhe des Ziels oder des Auges über dem Boden betrage $6\frac{1}{2}$ Fuß; man will die Schußweite finden.

Man suche zuerst den Winkel x am Ziele, so ist

$$125 : (75 - 6\tfrac{1}{2}) = r : tg\ x,$$ (siehe Formel 10 u. 11)

also $$tg\ x = \frac{r\,(75-6\frac{1}{2})}{125} = \frac{68{,}5 \cdot r}{125}$$

und $$\log tg\ x = \log 68{,}5 + \log r - \log 125,$$

$$\begin{array}{lrl} & \log 68{,}5 = & 1{,}8356906 \\ \text{addirt} & \log r = & 10 \\ \hline & & 11{,}8356906 \\ \text{subtrahirt} & \log 125 = & 2{,}0969100 \\ \hline & & 9{,}7387806 = \log tg\, x \end{array}$$

Dieser Logarithme ist ein trigonometrischer, und man findet in den Tafeln den zugehörigen Winkel $= 28^\circ\, 43'\, 8'' = x$.

Nun suche man die Hypotenuse y, so ist

$$y : 125 = r : \cos 28^\circ\, 43'\, 8''$$

oder

$$y : 68{,}5 = r : \sin 28^\circ\, 43'\, 8''$$

folglich

$$y = \frac{68{,}5 \,.\, r}{\sin 28^\circ 43' 8''}$$

und

$$\log y = \log 68{,}5 + \log r - \log \sin 28^\circ 43' 8''$$

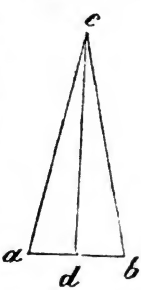
$$\begin{array}{lrl} & \log 68{,}5 = & 1{,}8356906 \\ \text{addirt} & \log r = & 10 \\ \hline & & 11{,}8356906 \\ \text{subtrahirt} & \log \sin 28^\circ 43' 8'' = & 9{,}6817048 \\ \hline & & 2{,}1539858 = \log y \end{array}$$

Dieser Logarithme ist ein gemeiner, wie bei Aufgabe (1), und die zugehörige Zahl ist 142,55′ gleich der Schußweite.

Anmerk. Wenn man in solchen Fällen die dem erhaltenen Logarithmen zugehörige Zahl verlangt, so muß man die Frage stellen, ob eine Seite oder ein Winkel gesucht werden soll. Im ersteren Falle hat man die zugehörige Zahl in den gemeinen, im letzteren aber in den trigonometrischen Logarithmen zu suchen.

3) Wie groß ist der Umfang eines regelmäßigen Funfzehnecks, wenn der Halbmesser des umschriebenen Kreises 40 Fuß beträgt?

Fig. 176.



Auflösung. Man theile das Funfzehneck von seinem Mittelpunkte aus in 15 Dreiecke, so daß die Seiten des ersten Seiten der Dreiecke werden, und es sei a b c (Fig. 176) eins dieser Dreiecke. In diesem ist Winkel $acb = \frac{360^\circ}{15} = 24^\circ$. Man fälle nun, da dieses Dreieck gleichschenkelig ist, von c eine Senkrechte cd auf ab, so erhält man zwei rechtwinkelige congruente Dreiecke, in welchen Winkel $acd = \frac{24^\circ}{2} = 12^\circ$ ist.

Wir haben also aus der gegebenen Hypotenuse $ac = 40'$ und dem Winkel $acd = 12^\circ$ die Kathete ad zu suchen und diese mit 2 zu multipliciren, welches die Seite ab giebt; wird diese wieder mit 15 multiplicirt, so erhält man den Umfang des Funfzehnecks. Bezeichnen wir den Umfang mit P, so ist

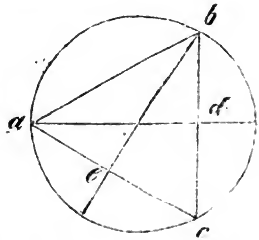
$$P = \frac{15 \,.\, 2 \,.\, 40 \sin 12^\circ}{r} = \frac{1200 \sin 12^\circ}{r},$$

und es ist nur noch nach vorhergehenden Regeln die Rechnung auszuführen.

II. Von der Ausmessung schiefwinkeliger ebener Dreiecke.

§ 242. Lehrsatz. In jedem Dreieck verhalten sich die Seiten, wie die Sinusse der ihnen gegenüberliegenden Winkel.

Fig. 172.



Beweis. Es sei abc (Fig. 172) ein Dreieck von beliebiger Gestalt; man beschreibe um dasselbe einen Kreis, so ist das Maß des Winkels a der halbe Bogen bc, eben so ist die Hälfte des Bogens ac das Maß des Winkels b (§ 57).

d. i. $a = \frac{1}{2}$ Bog. bc,

$b = \frac{1}{2}$ Bog. ac.

Ferner ist die Hälfte der Sehne bc, nämlich bd, gleich dem Sinus des halben Bogens bc, und so auch die Hälfte der Sehne ac d. i. ce gleich dem Sinus des halben Bogens ac, wenn der Halbmesser für den Sinus totus angenommen wird.

d. i, $\frac{1}{2}\,bc = \sin \frac{1}{2}$ Bog. $bc = \sin a$

$\frac{1}{2}\,ac = \sin \frac{1}{2}$ Bog. $ac = \sin b$

folglich $\frac{1}{2}\,bc : \frac{1}{2}\,ac = \sin a : \sin b$

oder $bc : ac = \sin a : \sin b.$

Auf gleiche Art läßt sich der Beweis für jede zwei andern Seiten und die ihnen gegenüberliegenden Winkel darthun.

§ 243. Bezeichnet man zwei Seiten mit a und b und die ihnen ihnen gegenüberliegenden Winkel mit A und B, so ist

$$a : b = \sin A : \sin B.$$

Es sei nun gegeben:

I. Zwei Seiten und ein Winkel, der der einen dieser Seiten gegenüberliegt; und es soll gesucht werden der Winkel, welcher der andern gegenüberliegt, so ist

$$1)\ \sin A = \frac{a.\sin B}{b},\ \sin B = \frac{b.\sin A}{a}.$$

II. Zwei Winkel und eine Seite, welche dem einen dieser Winkel gegenüberliegt; und es soll gesucht werden die Seite, welche dem andern Winkel gegenüberliegt, so ist

$$2)\ a = \frac{b.\sin A}{\sin B},\ b = \frac{a.\sin B}{\sin A}.$$

Beispiel 1. Es sei gegeben Winkel $A = 24^\circ\ 18'\ 12''$, $B = 36^\circ\ 14'\ 26''$ und die Seite $a = 2789$ Linien; und es sollen die Seiten b und c gesucht werden. Sonach ist auch Winkel C bekannt, nämlich $C = 180^\circ - B - A = 119^\circ\ 27'\ 22''$.

Auflösung. Es ist wegen $b = \frac{a \sin B}{\sin A}$.

$\log b = \log a + \log \sin B - \log \sin A$. Also steht die Rechnung so:

$$
\begin{array}{rl}
\log a = & 3,4454485 \\
\log \sin B = & \underline{9,7716886} \\
 & 13,2171371 = \log a . \sin B \\
\log \sin A = & \underline{9,6144409} \\
 & 3,6026962 = \log b
\end{array}
$$

mithin b = 4005,86 Linien.

Ferner ist wegen $c = \frac{a \sin C}{\sin A}$

$$
\begin{array}{rl}
\log a = & 3,4454485 \\
\log \sin C = & \underline{9,9398848} \\
 & 13,3853333 = \log a . \sin C \\
\log \sin A = & \underline{9,6144409} \\
 & 3,7708924 = \log c
\end{array}
$$

also c = 5900,55 Linien.

Beispiel 2. Es sei a = 204 Fuß, b = 246 Fuß, und Winkel A = 36° 4′ 5″, man verlangt die übrigen Stücke.

Auflösung. Es ist wegen $\sin B = \frac{b \sin A}{a}$ die Rechnung folgende:

$$
\begin{array}{rl}
\log b = & 2,3909351 \\
\log \sin A = & \underline{9,7699279} \\
 & 12,1608630 = \log b . \sin A \\
\log a = & \underline{2,3096302} \\
 & 9,8512328 = \log \sin B.
\end{array}
$$

Hier müssen wir bedenken, das jeder Sinus zwei verschiedenen Winkeln angehört, die einander zu 180° ergänzen (§ 222). Dann haben aber auch offenbar C und c zwei Werthe; daher giebt es im Allgemeinen zwei Dreiecke, die der Aufgabe genügen (vergl. § 40). Wenn jedoch der gegebene Winkel A der größere der beiden Seieen a, b gegenüberliegt, so daß a größer als b ist, so muß auch nach (§ 40) A größer als B, folglich B ein spitzer Winkel sein. In diesem Fall giebt es also nur eine Auflösung der Aufgabe oder die Aufgabe ist bestimmt. Steht aber, wie in unserem Beispiele, der gegebene Winkel A der kleineren der beiden gegebenen Seiten gegenüber, so giebt es für diesen Fall zwei verschiedene Dreiecke.

Es ist also für 9,8512328 = log sin B sowohl

B = 45° 13′ 53″, also auch B = 134° 46′ 7″,

daher C = 98° 42′ 2″, als auch C = 9° 9′ 48″.

Um die Seite c zu finden, ist für den ersteren Fall

$$\begin{array}{rl} \log a = & 2{,}3096302 \\ \log \sin C = & \underline{9{,}9949733} \\ & 12{,}3046035 = \log a . \sin C \\ \log \sin A = & \underline{9{,}7699279} \\ & 2{,}5346756 = \log c \end{array}$$

also $c = 342{,}51$ Fuß.

Für den zweiten Fall ist

$$\begin{array}{rl} \log a = & 2.3096302 \\ \log \sin C = & \underline{9{,}2020779} \\ & 11{,}5117081 = \log a . \sin C. \\ \log \sin A = & \underline{9{,}7699279} \\ & 1{,}7417802 = \log c \end{array}$$

daher $c = 55{,}18$ Fuß.

Es ist also

für das eine Dreieck

$A = 36^\circ\ 4'\ 5''$; $a = 204$ Fuß
$B = 45^\circ\ 13'\ 53''$; $b = 246$ „
$C = 98^\circ\ 42'\ 2''$; $c = 342{,}51$ „

für das andere Dreieck

$A = 36^\circ\ 4'\ 5''$; $a = 204$ Fuß
$B = 134^\circ\ 46'\ 7''$; $b = 246$ „
$C = 9^\circ\ 9'\ 48''$; $c = 55{,}18$ „

Beispiel 3. Es sei im Dreieck ABC, die Seite $a = 678$ Fuß, $b = 869$ Fuß und der Winkel $B = 120$ Grad; und es sollen die übrigen Stücke, d. i. der Winkel A, C und die Seite c gesucht werden.

Auflösung 1. Man suche zuerst den Winkel A nach (1), so ist

$$\log A = \log 678 + \log \sin 120^\circ - \log 869.$$

Man findet $A = 42^\circ\ 30'\ 20''$. $C = 17^\circ\ 29'\ 40''$, $c = 561{,}7$.

Beispiel 4. Es sei in dem Dreieck der Winkel $A = 40^\circ$. $B = 45^\circ$ und die Seite $b = 30$ Fuß; und es soll gesucht werden die Seite a, und der Winkel C, so ist nach (2)

$$\log a = \log 30 + \log \sin 40^\circ - \log \sin 45^\circ.$$

§ 244. Es fragt sich, warum in den letztern Formeln der Sinus totus r, der doch bei jeder der obigen Formeln für das rechtwinkelige Dreieck vorkommt, sich nicht befindet? Dieser kann hier eben sowohl wie oben mit in die Formel eingeführt werden; er verschwindet aber in derselben durch Division oder Multiplikation. Es soll deshalb noch ein zweiter Beweis geführt werden.

Man denke sich ein beliebiges Dreieck, und die den Winkeln A, B, C gegenüberliegenden Seiten a, b, c.

Man fälle aus B des Perpendikel BD, so wird dieses schiefwinkelige Dreieck in zwei rechtwinkelige zerlegt; es ist daher

$$b : CD = r : \sin A, \text{ also } cD = b . \frac{\sin A}{r},$$

ferner a : C, D = r : sin B, und C D = $a.\frac{\sin B}{r}$,

folglich $b.\frac{\sin A}{r} = \frac{a \sin B}{r}$

oder, wenn beide Seiten mit r multiplicirt werden,

$$b \, . \sin A = a \sin B,$$

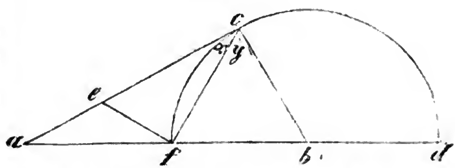
d. h. $a : b = \sin A : \sin B$,

also die Proportion wie oben.

Anmerk. Wenn auch in diesem Dreieck die Seiten a und b ungleich sind, so bleibt doch der Sinus totus r immer derselbe, weil alle rechten Winkel, für welche er der Sinus ist, einander gleich sind.

§ 245. Lehrsatz. Die Summe zweier Seiten eines Dreiecks verhält sich zur Differenz derselben, wie die Tangente der halben Summe der gegenüberliegenden Winkel zur Tangente der halben Differenz derselben.

Fig. 173.



Beweis. Es sei a b c (Fig. 173.) ein beliebig angenommenes Dreieck, C bezeichne den Winkel a c b und A den Winkel e a b, und a b, b c seien die Seiten, für welche der Satz bewiesen werden soll. Man verlängere a b so, daß a d = a b + b c werde; ferner mache man b f = b c, alsdann ist a f = a b — b c.

Darauf ziehe man c f und c d, so ist der Winkel c b d = C + A; es ist aber auch Winkel c b d = y + z = 2 z (denn es ist y = z (§ 31); folglich ist C + A = 2 z, und daher $z = \frac{A+C}{2}$.

Ferner ist z = A + x; folglich $x = z - A = \frac{A+C}{2} - A = \frac{A + C - 2A}{2} = \frac{C-A}{2}$.

Endlich ziehe man e f senkrecht auf c f; und da auch c d senkrecht auf c f ist, so folgt

$$cf : cd = r : \text{tg}\, z$$

und auch $cf : ef = r : \text{tg}\, x$

folglich $cd : ef = \text{tg}\, z : \text{tg}\, x$.

Ferner ist wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke

a c d und a e f

$cd : ef = ad : af$, daher auch

$ad : af = \text{tg}\, z : \text{tg}\, x$.

d. i. $(ab + bc) : (ab - bc) = \text{tg}\, \tfrac{1}{2}(C + A) : \text{tg}\, \tfrac{1}{2}(C - A.)$

Dieser Lehrsatz enthält die Anwendung auf die Aufgabe:

Es sind zwei Seiten eines Dreiecks und der von ihnen eingeschlossene Winkel gegeben; und es sollen die beiden andern Winkel (die also den gegebenen Seiten gegenüber liegen) zunächst gefunden werden.

Bezeichnet man die den Winkeln A, B, C eines Dreiecks gegenüberliegenden Seiten nach derselben Ordnung mit a, b, c, so ist vorhergehende Proportion

$(a + b) : (a - b) = tg \frac{1}{2} (A + B) : tg \frac{1}{2} (A - B.)$

Der zwischen liegende Winkel ist C und dieser ist nach der Bedingung der Aufgabe gegeben, daher auch A + B bekannt: denn es ist $A + B = 180° - C$. Es ist nur noch A — B zu suchen, dann lassen sich auch die einzelnen Winkel A und B bestimmen.

Wir haben also $tg \frac{1}{2} (A - B) = \frac{(a - b) . tg \frac{1}{2} (180° - C)}{a + b}$

$= \frac{(a - b) \cot \frac{1}{2} C}{a + b}$.

Beispiel 1. Die Diagonale eines Parallelogramms sei = 56, 48 und die eine Seite 37, 95 Zoll, dann der von beiden Linien eingeschlossene Winkel = 64° 9′ 16″; man verlangt die andere Seite und die von den Seiten des Parallelogramms eingeschlossenen Winkel.

Auflösung. Bezeichnet a die Diagonale, b die eine Seite, C den Zwischenwinkel, und c die andere Seite, so ist

$a + b = 94, 43;\ a - b = 18, 53;\ A + B = 115° 50' 44''.$

$$
\begin{aligned}
\text{Also } \log (a - b) &= 3{,}2678754 \\
\log \cot \tfrac{1}{2} C &= \underline{10{,}2029092} \\
& 13{,}4707846 = \log (a-b) . \cot \tfrac{1}{2} C \\
\log (a + b) &= \underline{3{,}9751100} \\
& 9{,}4956746 = \log tg \tfrac{1}{2} (A - B); \\
\text{folglich } \tfrac{1}{2} (A - B) &= 17° 23' 6'',07 \\
\text{dann war } \tfrac{1}{2} (A + B) &= \underline{57° 55' 22'',00} \\
\text{daraus folgt } A &= 75° 18' 28'',07; \\
\text{und } B &= 40° 32' 15'',93 \\
\text{über dies ist } C &= \underline{64° 9' 16'',00}
\end{aligned}
$$

also $A + B + C = 180°$, mithin in Richtigkeit.

Der eine Winkel des Parallelogramms ist also A = 75° 18′ 28″, und der andere = 90° — A = 14° 41′ 32″

Ferner ist, um c zu finden, nach vorhergehendem Paragraphen

$c = \frac{a \sin C}{\sin A}$, also

$$
\begin{aligned}
\log a &= 3{,}7518947 \\
\log \sin C &= \underline{9{,}9542292} \\
& 13{,}7061239 \\
\log \sin A &= \underline{9{,}9855622} \\
& 3{,}7205617 = \log c
\end{aligned}
$$

daher c = 5254 Zoll.

Beispiel 2. Es sei $a = 86$, $b = 65$ und $C = 45^\circ$; und es sollen die Winkel A und B gesucht werden.

Es ist also $a + b = 86 + 65 = 151$, $a - b = 21$, $\frac{1}{2}(180^\circ - C) = \frac{1}{2}(180^\circ - 45) = \frac{1}{2}\,135^\circ = 67^\circ\ 30'$;

$$\text{daher } \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(A - B) = \frac{21 \operatorname{tg} 67^\circ\ 30'}{151},$$

also $\log \operatorname{tg} \frac{1}{2}(A - B) = \log 21 + \log \operatorname{tg} 67^\circ\ 30' - \log 151$

$$\begin{array}{rl} \log 21 = & 1{,}3222193 \\ \log \operatorname{tg} 67^\circ\, 30' = & \underline{10{,}3827757} \\ & 11{,}7049950 \\ \log 151 = & \underline{\ 2{,}1789769} \\ & 9{,}5260181 = \log \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(A-B) = \log \cot \tfrac{1}{2} C. \end{array}$$

Schlagen wir nun diesen Logarithmen in den Tafeln auf, so finden wir $\frac{1}{2}(A - B) = 18^\circ\ 33'\ 35''$.

Verlangt man nun A und B, so addire man das eine Mal $\frac{1}{2}(A-B)$ zu $\frac{1}{2}(A + B)$, so erhält man A; dann subtrahire man dasselbe von $\frac{1}{2}(A - B)$, so erhält man B, nämlich aus Obigem ist

$$\begin{array}{rl} \tfrac{1}{2} A + \tfrac{1}{2} B = & 67^\circ\ 30' \\ \text{und } \tfrac{1}{2} A + \tfrac{1}{2} B = & 18^\circ\ 33'\ 35'' \\ \hline \text{Summe } A = & 86^\circ\ \ 3'\ 35'' \\ \text{Differenz } B = & 48^\circ\ 56'\ 25''. \end{array}$$

Es läßt sich nun auch die dritte Seite c finden.

Anmerkung. Wenn b größer ist als a, so ist auch B größer als A, wir haben daher nur die Zeichen umzukehren, und die Formel wird nun folgende:

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(B - A) = \frac{(b - a) \operatorname{tg} \frac{1}{2}(180^\circ - C)}{b + a}.$$

§ 246. **Aufgabe.** Aus den drei Seiten eines Dreiecks die Winkel zu finden.

Auflösung. Man setze (Figur 20, Seite 13.) $ab = a$, $bc = b$, $ac = c$, und bezeichne die diesen Seiten gegenüberliegenden Winkel wie in vorhergehender Aufgabe beziehungsweis mit A, B, C. — Dann sei $cl = h$, $lb = m$, $la = n$; so ist $h^2 = b^2 - m^2$, und auch $h^2 = c^2 - n^2$, also $b^2 - m^2 = c^2 - n^2$.

Nun ist $n^2 = (a - m)^2 = a^2 - 2\,am + m^2$; folglich $b^2 - m^2 = c^2 - a^2 + 2\,am - m^2$; mithin $b^2 = c^2 - a^2 + 2\,am$; daher

$$m = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2\,a}.$$

Nun ist aber auch $b : m = r : \cos C$, also $m = \frac{b \cos C}{r}$, oder für $r = 1$, $m = b \cos C$; folglich

$$1)\ \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2\,ab}.$$

Auf ähnliche Weise leitet man her

$$2)\ \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2\,ab}, \text{ und } 3)\ \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,bc}.$$

Beispiel. Es sei $a = 12',9$; $b = 8',5$; $c = 18',84$ und man verlangt die Winkel A, B und C. Nun ist $a^2 = 166{,}41$; $b^2 = 72{,}25$; $c^2 = 250{,}9056$; $2\,bc = 269{,}28$;

$$\text{daher } \cos A = \frac{156{,}7456}{269{,}28}.$$

$$\begin{array}{rl} \log 156{,}7456 = & 2{,}1951953 \\ \text{addirt} & 10 \\ \hline & 12{,}1951953 \\ \log 269{,}28 = & 2{,}4302041 \\ \hline & 9{,}7649812 = \log \cos A \end{array}$$

$$\text{also } A = 54^\circ\ 24'\ 8''.$$

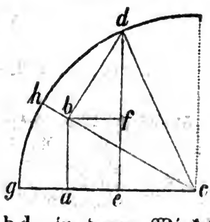
$$\text{Eben so findet man } B = 86^\circ\ 47'\ 14'',$$
$$C = 93^\circ\ 12'\ 46'',$$

$$\text{also } A + B + C = 180^\circ.$$

Anmerk. Wenn nun a, b, c große Zahlen sind, so wird die Berechnung der Winkel sehr mühsam. Weiter unten wird eine bequemere Auflösung dieser Aufgabe vorkommen.

Zusammengesetzte trigonometrische Formeln.

Fig. 174.



§ 247. Aufgabe. Die Sinus und Cosinus der Summe oder der Differenz zweier Winkel durch die Sinus und Cosinus der einzelnen Winkel auszudrücken.

Auflösung. Es sei Winkel $hcg = x$, und Winkel $dch = y$, also Winkel $dcg = x + y$ (Fig. 174.)

Man fälle aus d die Perpendikel db auf ch und de auf cg, ferner aus b die Perpendikel ba auf cg und bf auf de; so entstehen die ähnlichen rechtwinkeligen Dreiecke abc und fbd, in denen Winkel $bdf = hcg$ ist.

Nimmt man nun den Halbmesser cd als den Sinus totus $= 1$, so ist $bd = \sin y$, $bc = \cos y$, $de = \sin(x + y)$, $ce = \cos(x + y.)$

Ferner ist $bc : ba = 1 : \sin x$, also $ba = bc \sin x = \sin x \,.\, \cos y$, ingleichen $bd : fd = 1 : \cos x$, also $fd = bd.\cos x = \sin y.\cos x$.

Es ist aber auch $ba + fd = de = \sin(x + y)$, folglich

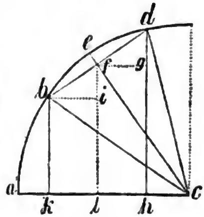
$$\text{I. } \sin(x + y) = \sin x . \cos y + \sin y . \cos x.$$

Dann ist $bc : ac = 1 : \cos x$, also $ac = bc . \cos x = \cos y . \cos x$, ingleichen $bd : bf = 1 : \sin . x$, also $bf = bd . \sin x = \sin y . \sin x$.

Es ist aber auch $ac - bf = ac - ae = ce = \cos(x + y)$; folglich

$$\text{II. } \cos(x + y) = \cos x . \cos y - \sin x . \sin y.$$

Fig. 175.



§ 248. Um Ausdrücke für die Differenz zu finden, so nehme man in dem Quadranten (Fig. 175.) den beliebigen Winkel acd an, ziehe willkürlich die Sehne bd und halbire sie durch ce. Dann sei Winkel $ace = x$ und Winkel $ecd = ecb = y$, so ist Winkel $bca = x - y$ wegen Winkel $ecb = dce$. Aus b, f und d fälle man auf ac die Perpendikel bk, fl, dh, und auf fl, dh die Perpendikel bi, fg: so ist, wenn wie vorher der Sinus totus $= 1$ gesetzt wird, $df = \sin y$, $cf = \cos y$, $bk = \sin(x - y)$ und $ck = \cos(x - y)$.

Nun ist $cf : fl = 1 : \sin x$, also $fl = cf . \sin x = \cos y . \sin x$, ingleichen $fd : dg = 1 : \cos x$, also $dg = fd . \cos x = \sin y . \cos x$.

Es ist aber $fl - dg = fl - fi = kb = \sin(x - y)$; folglich

$$\text{III. } \sin(x - y) = \sin x . \cos y - \sin y . \cos x.$$

Ferner ist $cf : cl = 1 : \cos x$, also $cl = cf \cos x = \cos y . \cos x$, ingleichen $fd : fg = 1 : \sin x$, also $fg = fd . \sin x = \sin y . \sin x$.

Nun ist $cl + fg = cl + lk = ck = \cos(x - y)$; folglich

$$\text{IV. } \cos(x - y) = \cos x . \cos y + \sin x . \sin y.$$

Anmerkung. Wegen $bf = fd$ ist $fg = bl$, also auch $ih = hk$.

Mit diesen 4 Formeln lassen sich, wie in der Folge gezeigt wird, mannigfache Anwendungen in der analytischen Trigonometrie machen, auch noch eine bedeutende Anzahl anderer Formeln aus ihnen ableiten; sie sind daher als Grund- oder Hauptformeln zu betrachten und dem Gedächtnisse wohl einzuprägen.

Zusatz. Man wird finden, daß vorangehende 4 Formeln für jeden beliebig angenommenen Werth von x und y sich bewähren.

Für $x = 90°$ ist

aus (I) $\sin(90° + y) = \cos y$, wegen $\sin 90° = 1$ und $\cos x = 0$

„ (II) $\cos(90° + y) = - \sin y$, wegen $\cos 90° = 0$ und $\sin 90° = 1$

„ (III) $\sin(90° - y) = \cos y$

„ (IV) $\cos(90° - y) = - \sin y$.

Diese vier Ergebnisse stimmen mit den obigen (§ 214 rc.) überein.

§ 249. Setzt man in den Formeln I. und II., nach und nach y, 2 y, 3 y ... statt x, so entstehen, wenn man jene erhaltene Gleichung in die nächstfolgende substituirt, folgende:

$$\sin 2x = 2 \cos x . \sin x$$
$$\sin 3x = 3 \cos^2 x . \sin x - \sin^3 x$$
$$\sin 4x = 4 \cos^3 x . \sin x - 4 \cos x . \sin^3 x$$
$$\sin 5x = 5 \cos^4 x . \sin x - 10 \cos^2 x . \sin^3 x + \sin^5 x \text{ u. s. w.}$$

§ 250. Bestimmt man die Gleichungen für den Cosinus, so erhält man

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$
$$\cos 3x = \cos^3 x - 3 \cos x . \sin^2 x$$
$$\cos 4x = \cos^4 x - 6 \cos^2 x . \sin^2 x + \sin^4 x$$
$$\cos 5x = \cos^5 x - 10 \cos^3 x . \sin^2 x + 5 \cos x . \sin^4 x \text{ u. s. w.}$$

§ 251. Aus der Gleichung $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ folgt, wenn man $1 - \cos^2 x$ statt $\sin^2 x$ setzt,

$$1) \quad \cos x = \sqrt{\frac{1 + \cos 2x}{2}};$$

und substituirt man in derselben Gleichung $1 - \sin^2 x$ statt $\cos^2 x$, so ergiebt sich

$$2) \quad \sin x = \sqrt{\frac{1 - \cos 2x}{2}}.$$

Setzt man $x = \frac{1}{2} z$, so folgt

$$3) \quad \cos \tfrac{1}{2} z = \sqrt{\frac{1 + \cos z}{2}} \text{ (aus 1), und}$$

$$4) \quad \sin \tfrac{1}{2} z = \sqrt{\frac{1 - \cos z}{2}} \text{ (aus 2).}$$

Formeln für die Summe und die Differenz der Tangente und Cotangente zweier Winkel.

§ 252. Man dividire die rechte Seite einer jeden der 4 Grundformeln (§ 247) durch $\cos x . \cos y$, $\sin x . \sin y$, $\sin x . \cos y$, so ergeben sich folgende 12 Formeln:

$$1) \quad \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \frac{\sin (x + y)}{\cos x . \cos y}$$

$$2) \quad \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = \frac{\sin (x - y)}{\cos x . \cos y}$$

$$3) \quad 1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = \frac{\cos (x + y)}{\cos x . \cos y}$$

4) $1 + \operatorname{tg} x . \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x + y)}{\cos x . \cos y}$

5) $\operatorname{cotg} x + \operatorname{cotg} y = \frac{\sin(x + y)}{\sin x . \sin y}$

6) $\operatorname{cotg} y - \operatorname{cotg} y = \frac{\sin(x + x)}{\sin x . \sin y}$

7) $\operatorname{cotg} x . \operatorname{cotg} y - 1 = \frac{\cos(x + y)}{\sin x . \sin y}$

8) $\operatorname{cotg} x . \operatorname{cotg} y + 1 = \frac{\cos(x - y)}{\sin x . \sin y}$

9) $1 + \operatorname{cotg} x . \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x + y)}{\sin x . \cos y}$

10) $1 - \operatorname{cotg} x . \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x - y)}{\sin x . \cos y}$

11) $\operatorname{cotg} x - \operatorname{tg} y = \frac{\cos(x + y)}{\sin x . \cos x}$

12) $\operatorname{cotg} x + \operatorname{tg} y = \frac{\cos(x - y)}{\sin x . \cos y}$

Formeln für die Tangente und Cotangente der Summe und der Differenz zweier Winkel.

§ 253. Man verbinde die 4 Grundformeln (§ 247) zuerst auf folgende Weise:

$$\frac{\sin(x + y)}{\cos(x + y)} = \frac{\sin x . \cos y + \sin y . \cos x}{\cos x . \cos y - \sin x . \sin y}$$

$$\frac{\sin(x - y)}{\cos(x - y)} = \frac{\sin x . \cos y - \sin y . \cos y}{\cos x . \cos y + \sin y . \sin x}$$

$$\frac{\cos(x + y)}{\sin(x + y)} = \frac{\cos x . \cos y - \sin x . \sin y}{\sin x . \cos y + \cos x . \sin y}$$

$$\frac{\cos(x - y)}{\sin(x - y)} = \frac{\cos x . \cos y + \sin x . \sin y}{\sin x . \cos y - \cos x . \sin y}$$

Man dividire nun den Zähler und Nenner der rechten Seite durch $\cos x . \cos y$, dann durch $\sin x . \sin y$; ferner durch $\sin x . \cos y$ oder durch $\cos x . \sin y$, so erhält man nach der Ordnung folgende Formeln:

1) $\operatorname{tg}(x + y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x . \operatorname{tg} y} = \frac{\operatorname{cotg} x + \operatorname{cotg} y}{\operatorname{cotg} x . \operatorname{cotg} y + 1}$

$= \frac{1 + \operatorname{cotg} x . \operatorname{cotg} y}{\operatorname{cotg} x - \operatorname{cotg} y} = \frac{\operatorname{tg} x . \operatorname{cotg} y + 1}{\operatorname{cotg} y - \operatorname{tg} x}$

$$2)\quad tg(x-y) = \frac{tg\,x - tg\,y}{1 + tg\,x . tg\,y} = \frac{cotg\,y - cotg\,x}{cotg\,x . cotg\,y + 1}$$

$$= \frac{1 - cotg\,x . cotg\,y}{cotg\,x + cotg\,y} = \frac{tg\,x . cotg\,y - 1}{cotg\,y + tg\,x}$$

$$3)\quad cotg(x+y) = \frac{1 - tg\,x . tg\,y}{tg\,x + tg\,y} = \frac{cotg\,x . cotg - 1}{cotg\,x + cotg\,y}$$

$$= \frac{cotg\,x - tg\,y}{1 + cotg\,x . tg\,y} = \frac{cotg\,y - tg\,x}{tg\,x . cotg\,y + 1}$$

$$4)\quad cotg(x-y) = \frac{1 + tg\,x . tg\,y}{tg\,x - tg\,y} = \frac{cotg\,x . cotg\,y + 1}{cotg\,y - cotg\,x}$$

$$= \frac{cotg\,x + tg\,y}{1 - cotg\,x . tg\,y} = \frac{cotg\,y + tg\,x}{tg\,x . cotg\,y - 1}$$

Zusatz. Setzt man in den Formeln (2) und (4) $x = o$ so folgt $tg(-y) = -\,tg\,y = +\,cotg\,y$;

und $cotg(-y) = -\dfrac{1}{tg\,y} = -\,cotg\,y$.

Formeln für die Summe und Differenz der Sinus und Cosinus zweier Winkel.

§ 254. Durch Addition und Subtraction der Grundformeln (§ 247), erhält man

1) $\sin(x + y) + \sin(x - y) = 2 \sin x . \cos y$
2) $\sin(x + y) - \sin(x - y) = 2 \cos x . \sin y$
3) $\cos(x + y) + \cos(x - y) = 2 \cos y . \cos x$
4) $\cos(x - y) - \cos(x + y) = 2 \sin x . \sin y$

§ 255. Setzt man in diesen Formeln $x + y = p$, $x - y = q$, also $x = \frac{1}{2}(p + q)$, $q = \frac{1}{2}(p - q)$, so ergeben nachstehende 4 Formeln:

1) $\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{1}{2}(p + q) \cos \frac{1}{2}(p - q)$
2) $\sin p - \sin q = 2 \sin \frac{1}{2}(p - q) \cos \frac{1}{2}(p + q)$
3) $\cos q + \cos p = 2 \cos \frac{1}{2}(p + q) \cos \frac{1}{2}(p - q)$
4) $\text{cns}\, q - \cos p = 2 \sin \frac{1}{2}(p + q) \sin \frac{1}{2}(p - q)$

Zusatz. Verbindet man je zwei der 4 letzten Formeln durch Division, und beachtet zugleich die Formel $tg\,x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ (§ 234), so erhält man folgende:

$$5)\quad \frac{\sin p + \sin q}{\sin p - \sin q} = \frac{tg \frac{1}{2}(p+q)}{tg \frac{1}{2}(p-q)} = tg \tfrac{1}{2}(p+q)\, cotg \tfrac{1}{2}(p-q)$$

6) $\frac{\cos q - \cos p}{\cos q + \cos p} = \ldots\ldots\ldots\ldots = \operatorname{tg} \frac{1}{2}(p+q) \operatorname{tg} \frac{1}{2}(p-q)$

7) $\frac{\sin p + \sin q}{\cos p + \cos q} = \frac{\cos q - \cos p}{\sin p - \sin q} = \operatorname{tg} \frac{1}{2}(p+q)$

8) $\frac{\sin p - \sin q}{\cos p + \cos q} = \frac{\cos q - \cos p}{\sin p + \sin q} = \operatorname{tg} \frac{1}{2}(p-q)$

Anmerkung. Aus den bisher entwickelten Formeln können noch viele andere abgeleitet werden, wenn man sie weiter durch Addition, Subtraction, Multiplikation und Substitution mit einander verbindet.

Dritter Abschnitt.

Berechnung der trigonometrischen oder goniometrischen Functionen. Trigonometrische Tafeln.

§ 256. Die bisherigen Lehren setzen uns in den Stand, die Sinus, Cosinus, Tangenten und Cotangenten aller Winkel von 0° bis 90° bestimmen zu können. Bei dieser Berechnung setzt man gewöhnlich den Halbmesser oder Sinus totus = 1.

Wir wollen nun zunächst den Sinus des Winkels von 30° bestimmen.

Es ist nämlich $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ chord 60° (§ 242), und chord 90° gleich dem Halbmesser = 1; folglich auch

$\sin 30^\circ = \frac{1}{2} = 0{,}5$.

Ferner ist wegen $\cos 30^\circ = \sqrt{1 - \sin^2 30^\circ} = \sqrt{1-(\frac{1}{2})^2}$

$\cos 30^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}$. Da nun 30° und 60° einander zu 90° ergänzen, so ist auch

$\sin 60^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

$\cos 60^\circ = \frac{1}{2} = 0{,}5$, also dem Sinus von 30° gleich. Ferner ist wegen $\sin 18^\circ = \frac{1}{2}$ chord 36° gleich der Hälfte der Seite des eingeschriebenen Zehnecks (§ 131 u. s. w.),

$\sin 18^\circ = \frac{1}{4}(-1 + \sqrt{5})$. Daraus folgt, wegen $\cos 18^\circ = \sqrt{1 - \sin^2 18^\circ}$,

$\cos 18^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{5 + \sqrt{5}}$. Es ist aber auch wegen der Ergänzung

$\sin 72^\circ = \frac{1}{2}(5 + \sqrt{5})$. Nun ist $\cos 72^\circ = \sqrt{1 - \sin^2 72}$, also nach gehöriger Ausführung,

$\cos 72^\circ = \frac{1}{4}(-1 + \sqrt{5})$.

Nehmen wir nun obige Formeln (2) und (1) (§ 251.) zu Hülfe und setzen $z = 30^\circ$, so ist

$$\sin 15^\circ = \sqrt{\frac{1 - \cos 30^\circ}{2}} = \tfrac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2}), \text{ und}$$

$$\cos 15^\circ = \sqrt{\frac{1 + \cos 30^\circ}{2}} = \tfrac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2}), \text{ daher auch}$$

$$\sin 75^\circ = \ldots\ldots\ldots\ldots \tfrac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2}), \text{ und}$$
$$\cos 75^\circ = \ldots\ldots\ldots\ldots \tfrac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2}).$$

Auf diese Weise fortfahrend, finden wir aus denselben Formeln

$$\sin 9^\circ = \sqrt{\frac{1 - \cos 18^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{5 + \sqrt{2}}}{2}}$$

$$\cos 9^\circ = \sqrt{\frac{1 + \cos 18^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{5 + \sqrt{2}}}{2}}$$

$$\sin 81^\circ = \ldots\ldots\ldots\ldots \sqrt{\frac{1 + \sqrt{5 + \sqrt{2}}}{2}}$$

$$\cos 81^\circ = \ldots\ldots\ldots\ldots \sqrt{\frac{1 - \sqrt{(5 + \sqrt{2})}}{2}}.$$

Bringen wir ferner die Grundformeln III. und IV. (§ 247.) in Anwendung, so erhalten wir aus $\sin 18^\circ$, $\cos 18^\circ$, und $\sin 15^\circ$, $\cos 15^\circ$, da $\sin (18^\circ - 15^\circ) = \sin 3^\circ$, und $\cos (18^\circ - 15^\circ) = \cos 3^\circ$ ist, $\sin 3^\circ = \sin 18^\circ . \cos 15^\circ - \sin 15^\circ . \cos 18^\circ = \sin 18^\circ . \sin 75^\circ - \sin 15^\circ . \cos 18^\circ = \tfrac{1}{4}(-1 + \sqrt{5}) . \tfrac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2}) - \tfrac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2}) . \tfrac{1}{2}\sqrt{5 + \sqrt{5}}$. Die gehörige Ausführung giebt

$$\sin 3^\circ = \tfrac{1}{16}(\sqrt{30} + \sqrt{10} - \sqrt{6} - \sqrt{2} - 2\sqrt{15 + 3\sqrt{5}} + 2\sqrt{5 + \sqrt{5}})] = 0{,}052335056243; \text{ und}$$

$$\cos 3^\circ = \tfrac{1}{16}(\sqrt{30} - \sqrt{10} - \sqrt{6} + \sqrt{2} + 2\sqrt{15 + 3\sqrt{5}} + 2\sqrt{5 + \sqrt{5}})] = 0{,}998629534755.$$

Auf demselben Wege läßt sich dann $\sin 1\tfrac{1}{2}^\circ$ und $\cos 1\tfrac{1}{2}^\circ$, dann $\sin \tfrac{3}{4}^\circ$ und $\cos \tfrac{3}{4}^\circ$ finden. Darauf wird nach den Grundformeln (§ 247. I. und II.) $\sin (1\tfrac{1}{2}^\circ + \tfrac{3}{4}^\circ) = \sin 2\tfrac{1}{4}^\circ$, und auch $\cos 2\tfrac{1}{4}^\circ$ immer von $\tfrac{3}{4}$ zu $\tfrac{3}{4}^\circ$ weiter, d. h. Sinus und Cosinus von $3\tfrac{3}{4}$, $4\tfrac{1}{2}$, $5\tfrac{1}{4}$, 6, $6\tfrac{3}{4}^\circ$ u. s. w. bis 45° gefunden.

Damit man nun die Sinus und Cosinus für alle einzelnen Minuten erhalte, ist es nothwendig vorerst sin 1′ zu finden. Diesen erhält man auf folgende Art.

Aus dem $\sin \frac{3}{4}^{\circ} = \sin 45'$ findet man (nach §. 249) $\sin \frac{45}{2}'$, dann $\sin \frac{45}{4}'$, ferner $\sin \frac{45}{8}'$, aus diesem $\sin \frac{45}{16}$, endlich $\sin \frac{45}{32}' = 0{,}000409061532$ und darauf $\sin \frac{45}{64}' = 0{,}00020453077$.

Nun zeigt sich bei dieser Berechnung, daß der $\sin \frac{45}{64}'$ in so weit der Hälfte vom $\sin \frac{45}{32}'$ gleich ist, so wie $\frac{45}{64}'$ genau der Hälfte von $\frac{45}{32}'$ gleich ist, daß der Fehler keinen zehntausendmillionten Theil des Halbmessers oder weniger als 0,0000000001 beträgt.

Aus diesem Grunde kann man schließen, daß zwischen $\frac{45}{32}'$ und $\frac{45}{64}'$ bei dem angenommenen Halbmesser die Sinus mit dem dazu gehörigen Bogen in Proportion stehen, und findet sin 1′ durch folgende Proportion;

$$\frac{45}{64}' : 1' = \sin \frac{45}{64}' : \sin 1';$$

das ist $\frac{45}{64}' : 1' = 1{,}00020453077 : \sin 1'$;

und somit $\sin 1' = \frac{64}{45} . 0{,}00020453077 = 0{,}000290888206$.

Da jetzt sin 1′ bekannt ist, so kann man die Sinus und Cosinus für alle einzelnen Minuten von 1′ bis 90° berechnen.

Anmerkung. Leichtere Methoden zur Berechnung der trigonometrischen Functionen geben die Entwickelungen der Reihen.

Aus den gefundenen Sinus und Cosinus wird man die Tangenten und Cotangenten nach den Formeln $\tang a = \frac{\sin x}{\cos a}$, und

$\cot a = \frac{\cos a}{\sin a}$ sehr leicht durch eine bloße Division berechnen.

Gebrauch der trigonometrischen Tafeln.

Sonach hat man die trigonometrischen Linien für die einzelnen Winkel zwischen 0 und 90° von Minute zu Minute berechnet, und nebst ihren Logarithmen, oder blos ihre Logarithmen, in Tafeln eingetragen; und eben diese Tafeln machen die schon eben erwähnten trigonometrischen Tafeln aus. Sie geben gewöhnlich nur die Sinus, Cosinus, Tangenten und Cotangenten, da die Secanten immer leicht vermittelst folgender Formeln gefunden werden können:

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}.$$

§ 257. Um die für die Rechnung und tabellarische Zusammenstellung unbequemen negativen Logarithmen zu vermeiden, hat man die Logarithmen aller die Einfachheit nicht überschreitenden Functionen um 10 volle Einheit vermehrt, d. h. r = 10000000000 gesetzt, welches die Bequemlichkeit gewährt, daß log r = 10 ist.

Man findet also die Logarithmen der trigonometrischen Linien für r = 1, wenn man die entsprechenden Logarithmen der Tafel jederzeit um 10 vermindert, oder an diese Logarithmen hinten — 10 anhängt.

So findet man in den Tafeln, z. B. log sin 60° = 9,6989700; und dieses ist der Logarithme für r = 10000000000, aber für r = 1 ist log sin 60° = 9,6989700 — 10, d. i. = 0,6989700 — 1, und

die zugehörige Zahl oder der absolute Werth des Sinus von 60° ist $= 0{,}5 = \frac{1}{2}$.

Bemerkung. Die Logarithmen der trigonometrischen Functionen sind also, wie oben schon bemerkt wurde, nichts anderes als die gemeinen Logarithmen zu den Zahlen, welche die trigonometrischen Linien selbst in ihrem Verhältniß zum Sinus totus angeben.

§ 258. Der Gebrauch der Tafeln kommt nun überhaupt auf die beiden folgenden Aufgaben zurück:

1) Zu einem in Graden, Minuten und Secunden gegebenen Winkel vermittelst der Tafeln die zugehörige trigonometrische Function oder deren Logarithmen zu finden.

2) Zu einer gegebenen trigonometrischen Function oder deren Logarithmen den entsprechenden Winkel in Graden, Minuten und Secunden mittelst der Tafeln zu finden.

Bei den Gebrauch der in den Tafeln mit Diff. 1″ bezeichneten Spalte hat man vorzüglich darauf zu sehen, wie die trigonometrischen Linien zu- und abnehmen, wenn die Winkel zu- und abnehmen.

Folgende Beispiele werden den erwähnten Gebrauch erläutern:

Beispiel 1. Es sei $x = 36^\circ\, 12'\, 14''$; man soll $\sin x$ finden.

$$\begin{array}{rl} \log \sin 36^\circ\, 12' = & 9{,}7712976 \\ \text{Diff. } 1'' \quad & \underline{\quad - \; 28{,}76} \\ & + 402{,}64 (^{14} \\ \log \sin 36^\circ\, 12'\, 14'' = & 9{,}0013379 \end{array}$$

Die Differenz $14 \times$ Diff. 1″ ist hier additiv, weil der Sinus wächst, wenn der Winkel wächst. Statt 402,64 wird 403 addirt, weil $6 > 5$ ist.

2. Es sei $x = 25^\circ\, 18'\, 16''$; man soll $\cos x$ finden.

$$\begin{array}{rl} \log \cos 25^\circ\, 18' = & 9{,}9562081 \\ \text{Diff. } 1'' = & \underline{\qquad\quad 9{,}96} \\ & - 159{,}36 (^{16} \\ \log \cos 25^\circ\, 18'\, 16'' = & 9{,}9561922 \end{array}$$

Die Differenz ist hier subtractiv, weil der Cosinus abnimmt, wenn der Winkel wächst. Es wird aber hier 159, nicht 160 abgezogen, weil die in der Differenz auf 9 folgende Ziffer $3 < 5$ ist.

3. Es sei $x = 64^\circ\, 18'\, 12''$; man soll $\operatorname{tang} x$ finden.

$$\begin{array}{rl} \log \operatorname{tang} 64^\circ\, 18' = & 10{,}3176135 \\ \text{Diff. } 1'' = & \underline{\qquad\quad 53{,}90} \\ & + 646{,}80 (^{12} \\ \log \operatorname{tang} 64^\circ\, 18'\, 12'' = & 10{,}3176782 \end{array}$$

Die Differenz ist additiv, weil die Tangente wächst, wenn der Winkel wächst. Statt 646 wird aber 647 addirt, da die erste Ziffer hinter dem Komma $= 8$, d. i. > 5 ist.

4. Es sei $x = 14^\circ\ 17'\ 10''$; man soll $\cot x$ finden.

$$\begin{array}{rcl} \log\cot 14^\circ\ 17' & = & 10{,}5941637 \\ \text{Diff. } 1'' & = & 88{,}02 \\ \hline & & -\ 880{,}20(^{10} \\ \log\cot 14^\circ\ 17'\ 10'' & = & 10{,}5940757\ . \end{array}$$

Wie man sich zu verhalten hat, wenn die Winkel nahe $= 0$, oder nahe $= 90^\circ$ sind, lehrt eine einfache Ansicht der Tafeln von selbst, oder die Einleitung zu denselben. Sollte z. B. $\log\sin 5^\circ\ 18'\ 25''$ gesucht werden, so giebt die Tafel:

$$\begin{array}{rcl} \log\sin 5^\circ\ 18'\ 20'' & = & 8{,}9659874 \\ \text{Diff. } 1'' & = & 226{,}7 \\ \hline & & +\ 1133{,}5(^{5} \\ \log\sin 5^\circ\ 18'\ 25'' & = & 8{,}9661008\ . \end{array}$$

Man kann hier auch statt 1133 lieber 1134 addiren, da die erste Ziffer hinter dem Komma zwar $= 5$ ist, nach der 5 in der zu addirenden Differenz aber eigentlich noch andere Ziffern folgen, der ganze vernachlässigte Theil der Differenz in diesem Falle also doch > 5, eigentlich $> 0{,}5$ ist.

5. Es sei $\log\sin x = 9{,}6389576$ gegeben; man soll x finden.

$$\begin{array}{rcl} \log\sin x & = & 9,\ 638\ 9576 \\ \log\sin 25^\circ\ 48' & = & 9,\ 638\ 7199 \\ \hline \text{Diff. } 1'' & = & 4354 \mid 237700 \mid 54'',5 \\ & & \quad\quad 20000 \\ & & \quad\quad\ 25840 \\ x & = & 25^\circ\ 48'\ 55''\ . \end{array}$$

Man addirt hier wieder 55″ statt 54″. Denn wenn auch die erste Ziffer hinter dem Komma $= 5$ ist, so folgen auf dieselbe doch noch mehrere Ziffern, und der ganze vernachlässigte Theil der zu addirenden Differenz ist doch noch > 5, eigentlich $> 0{,}5$.

6. Es sei $\log\cos x = 9{,}5927638$ gegeben; man soll x finden.

$$\begin{array}{rcl} \log\cos x & = & 9,\ 592\ 7638 \\ \log\cos 66^\circ\ 58' & = & 9,\ 592\ 4728 \\ \hline \text{Diff. } 1'' & = & 4951 \mid 291000 \mid 58{,}7 \\ & & \quad\quad 43450 \\ & & \quad\quad\ 38420 \\ x & = & 66^\circ\ 57'\ 1''\ . \end{array}$$

Die Differenz ist hier subtractiv, da der Cosinus abnimmt, wenn der Winkel wächst.

7. Es sei log tang x = 9,8625439; man soll x finden.

$$\log \text{tang}\, x = 9,\ 862\ 5439$$
$$\log \text{tang}\, 36^{\circ}\, 4' = 9,\ 862\ 3233$$

Diff. 1″ = 4424|220600|49,8

43640

38240

x = 36° 4′ 50″ .

8. Es sei log cot x = 10,1317658 gegeben; man soll x finden.

$$\log \cot x = 10{,}131\ 7658$$
$$\log \cot 36^{\circ}\, 27' = 10{,}131\ 5840$$

Diff. 1″ = 4406|181800|41,2

5560

11540

x = 36° 26′ 19″ .

Nachträgliche Bemerkungen. Die voranstehenden Rechnungen gründen sich überhaupt auf folgende Sätze:

I. Zu einem Winkel oder Bogen, der nebst den Graden und Minuten auch Secunden enthält, findet man in den Tafeln, die nur von Minute zu Minute berechnet sind, die zugehörende trigonometrische Linie oder ihren Logarithmen auf folgende Art:

Man nehme zuerst die den angegebenen Graden und Minuten entsprechende Function unmittelbar aus der Tafel und stelle dann die Proportion so:

60 Secunden verhalten sich zu den gegebenen Secunden, wie die Differenz der Functionen von dem nächst größeren und nächst kleineren Winkel in den Tafeln sich zu einer vierten geometrischen Proportionalzahl x verhält.

Diese gefundene Proportionalzahl wird nun, wie schon bemerkt ist, zu der Function des nächst kleineren Winkels addirt, wenn mit den Winkeln auch die Functionen wachsen, oder davon abgezogen, wenn die Functionen abnehmen.

Es sei nämlich, wie im ersten Beispiele, log sin 36° 12′ 14″ zu suchen, so ist

$$\log \sin 36^{\circ}\, 18' = 9{,}7714702$$
$$\log \sin 36^{\circ}\, 12' = 9{,}7712976$$

Differenz für 1′ oder 60″ = + 1726.

Also 60 : 14 = 1726 : x

folglich x = 1726.14 : 60 = 402,64.

Nun ist log sin 36° 12′ = 9,7712976
+ 402,64

daher log sin 36° 12′ 14″ = 9,7713379,

also wie oben.

Anmerkung. Wenn man die Zahl 1726 durch 60 dividirt, so erhält man 28,76, wie in Beispiel (1) und welche eben die Zahl ist, die in den Tafeln statt 1726 als Diff. 1″ gefunden wird.

Dieser Umstand, daß z. B. 28,76 statt 1726 als Diff. 1″ in den Tafeln steht, beruht offenbar auf der zweckmäßigen — auf Kürze abgesehenen — Einrichtung der Tafeln, indem man nur zu multipliciren braucht.

II. Zu einer gegebenen trigonometrischen Function, die in den Tafeln nicht genau anzutreffen ist, den dazu gehörigen Winkel oder Bogen in Graden, Minuten und Secunden zu finden.

Man schreibe zuerst aus der Tafel diejenige Anzahl von Graden und Minuten ab, welche der kleineren von jenen zwei Functionen entspricht, zwischen denen die gegebene Function liegt; dann bilde man die Proportion:

Die Differenz der nächst größeren und nächst kleineren Function in den Tafeln verhält sich zu der Differenz zwischen der gegebenen und nächst kleineren Function, wie sich 60″ zu einer vierten geometrischen Proportionalzahl z verhalten.

Diese vierte Proportionalzahl giebt eine Zahl von Secunden, die man zu den Graden und Minuten der nächst kleineren Function addirt, wenn mit den Winkeln auch die Functionen wachsen oder davon abzieht, wenn die Functionen abnehmen, während die Winkel wachsen.

Zur Erläuterung nehme man an, es sei 9,9561922 der Logarithme des Cosinus irgend eines Winkels, so findet man in den Tafeln, daß der zugehörige Winkel größer als 25° 18′ und kleiner als 25° 19′ ist.

Nun ist log cos 25° 19′ = 9,9561483
log cos 25° 18′ = 9,9562081

Differenz für 1′ oder 60″ = — 598

Der gegebene Logarithme.......... = 9,9561922
Der nächst kleinere log cos 25° 19′ = 9,9561483

Differenz.................... = 439

Daher — 598 : 439 = 60″ : z, folglich

$$z = \frac{439.60}{-598} = -44.$$

Nun ist die nächst kleinere Function
25° 19′
und z = — 44″

Daher der gesuchte Winkel = 25° 18′ 16″ (vergl. Beispiel 2).

Anmerkung. Man erhält auch hier durch Division mit 60 in 598 die in der Tafel angezeigte Differenz: Diff. $1'' = 9{,}96$.

In Beispiel 7 ist der gegebene Logarithme $= 9{,}8625439$, also ist

$$\log \operatorname{tang} 36^\circ\ 6' = 9{,}8625887$$
$$\log \operatorname{tang} 36^\circ\ 5' = \underline{9{,}8623233}$$

Differenz für $1'$ oder $60'' = \ + 2654$

Der gegebene Logarithme........ $= 9{,}8625439$

Der nächst kleinere $\log \operatorname{tg} 36^\circ\ 5' = \underline{9{,}8623233}$

$$2206$$

Folglich $2654 : 2206 = 60'' : z$; woraus hervorgeht $z = 49'',8$; also wie oben.

§ 259. Aufgaben. Es sei irgend eine trigonometrische Linie ihrer Größe nach für $r = 1$ gegeben; man verlangt ihren entsprechenden Winkel.

Auflösung. Man suche in der Tafel der gemeinen Logarithmen den Logarithmen dieser Größe, vermehre seine Kennziffer um 10, mit Weglassung der etwa angehängten negativen Zahl, so erhält man den trigonometrischen Logarithmen, für welchen man in den trigonometrischen Tafeln den correspondirenden Winkel findet.

Dieses Verfahren macht das Umgekehrte der Auflösungen vorhergehender Aufgaben aus.

Beispiel 1. Es sei für $r = 1$ die Größe 0,8547609 ein Cosinus; man fragt nach dem zugehörenden Winkel.

Es ist $\log 0{,}8547609 = 0{,}9318447 - 1$

also für $r = 10 \qquad = 9{,}9319447$

diesem Logarithmen entspricht ein Winkel $= 1^\circ\ 16'$.

2) Es sei 6,0761120 eine Tangente; man verlangt ihren entsprechenden Winkel.

Es ist $\log 6{,}0761120 = 0{,}7836258$

oder $= 10{,}7836258$

und der zugehörende Winkel ist $= 80^\circ\ 39'\ 1{,}5''$.

3) Es sei $\sqrt[6]{\frac{3}{7}}$ eine Cotangente; und es soll der zugehörende Winkel gesucht werden.

$$\log 3 = 0{,}4771213$$
$$\log 7 = \underline{0{,}8450080}$$
$$0{,}6320233 - 1$$

In diesen Logarithmen muß bekanntlich mit 5 dividirt werden; da aber wegen der dekadischen Ergänzung die hinten stehende negative Zahl kein Bruch werden darf, so muß man zu derselben noch -4 hinzufügen, dagegen die Kennziffer um 4 vermehren, wodurch man erhält

$$4{,}6320233 - 5.$$

Die Division mit 5 giebt nun

$$0{,}9264046 - 1 \quad \text{für } r = 1$$
$$\text{oder } 9{,}9264046 \quad \text{für } r = 10000000000.$$

Man erhält also einen Winkel $= 49^\circ\, 49'\, 54''$.

Vierter Abschnitt.

Fortsetzung von Aufgaben, denen vorhergehende Formeln zum Grunde liegen.

§ 260. Aufgabe. Aus den drei Seiten eines Dreiecks dessen Winkel zu finden.

Auflösung I. In den (§ 246, Seite 160) aufgestellten Formeln:
$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$, $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$, $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$,
addire man auf beiden Seiten einer jeden die Einheit; dadurch erhalten wir

$$1 + \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + 1 = \frac{b^2 + c^2 - a^2 + 2bc}{2bc}$$
$$= \frac{(b + c + a)(b + c - a)}{2bc}$$
$$1 + \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} + 1 = \frac{a^2 + c^2 - b^2 + 2ac}{2ac}$$
$$= \frac{(a + c + b)(a + c - b)}{2ac}$$
$$1 + \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} + 1 = \frac{(a + b + c)(a + b - c)}{2ab}$$

Wegen Zerlegung der Ausdrücke in Factoren, vergleiche Aufg. 12 rc. Seite 88.

Nun ist nach (§ 251) $1 + \cos A = 2\,(\cos \tfrac{1}{2} A)^2$; und die Anwendung des Werthes rechter Hand giebt nach gehöriger Ausführung

$\cos \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{(b + c + a)(b + c - a)}{4bc}}$. Eben so

ist $\cos \tfrac{1}{2} B = \sqrt{\frac{(a + c + b)(a + c - b)}{4ac}}$

und $\cos \tfrac{1}{2} C = \sqrt{\frac{(a + b + c)(a + b - c)}{4ab}}$.

Der Kürze wegen setze man die halbe Summe der drei gegebenen Seiten, nämlich $\frac{a+b+c}{2} = s$, also $a+b+c = 2s$. Dann ist

$$b+c-a = a+b+c-2a = 2s-2a = 2(s-a),$$
$$a+c-b = a+b+c-2b = 2s-2b = 2(s-b)$$
$$a+b-c = a+b+c-2c = 2s-2c = 2(s-c).$$

Die Einsetzung dieser Werthe in vorhergehende drei Gleichungen liefert nach gehöriger Ausführung

$$\text{M.} \qquad \cos \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$$

$$\text{"} \qquad \cos \tfrac{1}{2} B = \sqrt{\frac{s(s-b)}{ac}}$$

$$\text{"} \qquad \cos \tfrac{1}{2} C = \sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}$$

Aufl. II. Eben so wie für die Cosinus, lassen sich auch für die Sinus Ausdrücke der halben Winkel bestimmen.

Zu dem Ende ist aus Auflösung I, zu Anfange,

$$1 - \cos A = 1 - \frac{(b^2+c^2-a^2)}{2bc} = \frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{2bc}$$

und wegen $2bc-b^2-c^2+a^2 = a^2-(b-c)^2 = (a+c-b)(a+b-c)$

$$\text{folgt} \quad 1 - \cos A = \frac{(a+c-b)(a+b-c)}{2bc}$$

Eben so leitet man her

$$1 - \cos B = \frac{(b+c-a)(a+b-c)}{2ac}$$

$$1 - \cos C = \frac{(b+c-a)(a+c-b)}{2ab}$$

Nun ist nach (§ 251) $1 - \cos A = 2(\sin \frac{1}{2} A)^2$, folglich erhält man auf ähnliche Art wie oben:

$$\sin \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{(b+c-a)(a+b-c)}{4bc}}$$

$$\sin \tfrac{1}{2} B = \sqrt{\frac{(b+c-a)(a+b-c)}{4ac}}$$

$$\sin \tfrac{1}{2} C = \sqrt{\frac{(b+c-a)(a+c-b)}{4ab}}$$

oder, wenn s seine obige Bedeutung behält:

$$\text{N.} \qquad \sin \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$$

$$\text{"} \qquad \sin \tfrac{1}{2} B = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{ac}}$$

$$\text{"} \qquad \sin \tfrac{1}{2} C = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}$$

Beisp. 1. Es sei a = 1649, b = 1857, c = 1264 Linien, man verlangt die Winkel A, B, C.

Auflösung. Aus den Formeln in M erhalten wir

$$\log \sin \tfrac{1}{2} A = \tfrac{1}{2} [\log s + \log (s-a) - \log b - \log c]$$
$$\log \sin \tfrac{1}{2} B = \tfrac{1}{2} [\log s + \log (s-b) - \log a - \log c]$$
$$\log \sin \tfrac{1}{2} C = \tfrac{1}{2} [\log s + \log (s-c) - \log a - \log b]$$

Nun ist $s = 2385$, $s - a = 736$, $s - b = 528$, $s - c = 1121$.

Also $\log s = 3{,}3774884$
$\log (s-a) = 2{,}8668778$
$6{,}2443662 = \log s (s-a)$

$\log b = 3{,}2688119$
$\log c = 3{,}1019471$
$(6{,}3705590) = \log b + \log c$

2) $0{,}8738072 - 1 = \log s (s-a) - \log bc$
$0{,}9369036 - 1$

oder $9{,}9369036 = \log \cos \tfrac{1}{2} A.$

Daher $\tfrac{1}{2} A = 30^\circ 8' 34'' 33$ und $A = 60^\circ 17' 8{,}06''$.

Ferner $\log s = 3{,}3774884$
$\log (s-b) = 2{,}7226339$
$6{,}1001223 = \log s (s-b)$

$\log a = 3{,}2172206$
$\log c = 3{,}1017471$
$(6{,}3189677) = \log a + \log c$
$0{,}7983746 - 1 = \log s (s-b) - \log ac$
$0{,}8991873 - 1$

oder $9{,}8991873 = \log \cos \tfrac{1}{2} B.$

Folglich $\tfrac{1}{2} B = 38^\circ 59' 16'' 19$ und $B = 77^\circ 58' 32'' 38$.

Alsdann log s = 3,3784884
log (s—c) = 3,0496056

6,4270940 = log s (s—c)

log a = 3,2172206
log b = 3,2688119

(6,4860325) = log a + log b

2) 0,9410615—1 = log s (s—c) — log a b
0,9705307—1

oder 9,9705307 = log cos ½ C.

Daher ½ C = 20° 52′ 9,56″ und C = 41° 44′ 19,12″.

Probe: Es ist A =	60°	17′	8″ 66
B =	77°	58′	32″ 38
C =	41°	44′	19″ 12
Summe =	180°		0″ 16

Erläuterung. Es ist z. B. in der ersten Rechnung der Ausdruck 0,8738072 — 1 durch 2 dividirt, und wegen — 1 muß, damit die negative Zahl kein Bruch werde, sowohl 1 hinzugelegt, als auch wieder 1 hinweggenommen, also in 1,8738072 — 2 dividirt werden, wodurch man obige Zahl 0,9369036 — 1 erhält, und welche eigentlich der Logarithme von cos ½ A für r = 1 ist; also ist der Logarithme der Tafel = 9,9369036. (§ 259 Beisp. 3.) Ebenso verhält es sich in der zweiten und dritten Rechnung.

Auflösung II. In der Auflösung desselben Beispiels vermittelst der Formeln N. steht die Rechnung so:

log (s—b) = 2,7226339
log (s—c) = 3,0496056

5,7722395 = log (s—b) (s—c)

log b = 3,2688119
log c = 3,1017471

(6,3705590) = log b + log c

2) 0,4016805 — 1
0,7008403 — 1

oder 9,7008403 = log sin ½ A.

Also ½ A = 30° 8′ 34,34″ und A = 60° 17′ 8,68″.

Ferner log (s—a) = 2,8668778
log (s—c) = 3,0496056

5,9164834 = log (s—a) (s—c)

$\log a = 3{,}2172206$
$\log c = 3{,}1017471$

$(6{,}3189677) = \log a + \log c$

2) $0{,}5975157 - 1$

$0{,}7987579 - 1$

oder $9{,}7987579 = \log \sin \frac{1}{2} B.$

Daher $\frac{1}{2} B = 38^\circ\, 59'\, 16{,}15''$ und $B = 77^\circ\, 58'\, 32{,}30''$.

Endlich $\log (s-a) = 2{,}8668778$
$\log (s-b) = 2{,}7226339$

$5{,}5895117 = \log (s-a)(s-b)$

$\log a = 3{,}2172206$
$\log b = 3{,}2688119$

$(6{,}4860325) = \log a + \log b$

2) $0{,}1034792 - 1$

$0{,}5517396 - 1$

oder $9{,}5517396 = \log \sin \frac{1}{2} C.$

Daher $\frac{1}{2} C = 20^\circ\, 52'\, 9{,}51''$ und $C = 41^\circ\, 44'\, 19{,}02''$.

Probe: Es ist $A = 60^\circ\; 17'\; 8{,}68''$
$B = 77^\circ\; 58'\; 32{,}30''$
$C = 41^\circ\; 44'\; 19{,}02''$

Summe $= 180^\circ$

§ 261. Nach den Formeln $\sin 2x = 2 \sin x . \cos x$
oder $\sin x = 2 \sin \frac{1}{2} x . \cos \frac{1}{2} x$
ist also auch

$$\sin A = 2 A . \cos \tfrac{1}{2} A.$$

Wendet man diese Formel auf die Ausdrücke M und N des vorhergehenden Paragraphen an, so erhält man

$$\sin A = \frac{2}{bc} \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$\sin B = \frac{2}{ac} \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$\sin C = \frac{2}{ab} \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

Diese Formeln sind jedoch zur numerischen Berechnung der Winkel nicht so brauchbar wie die vorhergehenden für die Sinus und Cosinus der halben Winkel, denn da jedem Sinus zwei Winkel angehören (§ 222), so bleibt es in vielen Fällen zweifelhaft, welcher von beiden zu nehmen sei; hingegen die Formeln M und N können deshalb auf keine Zweideutigkeit führen, weil die dadurch erhaltenen Winkel immer spitz sein müssen.

§ 262. Aufgabe. Aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel eines Dreiecks dessen Flächeninhalt zu berechnen.

Auflösung. Man bezeichne die drei Seiten mit a, b, c und ihre Gegenwinkel nach derselben Ordnung mit A, B, C.

Dann nehme man etwa die Seite a als Grundlinie und denke sich auf dieselbe aus der gegenüberliegenden Winkelspitze A eine Senkrechte h als die Höhe des Dreiecks gefällt. Bezeichnet nun S den Flächeninhalt des Dreiecks, so ist bekanntlich $S = \frac{1}{2} a h$.

Nun ist auch, wegen der durch die Senkrechte entstandenen beiden rechtwinkeligen Dreiecke, $h = b \sin C = c \sin B$; und die Einsetzung eines jeden dieser Werthe in vorhergehende Gleichung statt h giebt

1) $S = \frac{1}{2} a b \sin C$; 2) $S = \frac{1}{2} a c \sin B$.

Eben so findet man auch 3) $S = \frac{1}{2} b c \sin A$.

§ 263. Aufgabe. Aus den drei Winkeln und einer Seite des Dreiecks seinen Flächeninhalt zu finden.

Auflösung. Man beachte, indem a, b, c und A, B, C die vorige Bedeutung haben, die aus (§ 243) bekannten Ausdrücke:

$$a : b = \sin A : \sin B, \quad \text{also } a = \frac{b \sin A}{\sin B}$$

$$a : c = \sin A : \sin A, \quad \ldots\ c = \frac{a \sin C}{\sin A}$$

$$b : c = \sin B : \sin C, \quad \ldots\ b = \frac{c \sin B}{\sin C}$$

Dann setze man die so eben erhaltenen Werthe von a, c, b in die Gleichungen der vorhergehenden Aufgabe nach derselben Ordnung, so erhält man

$$S = \frac{b^2 \sin A \,.\, \sin C}{2 \sin A},\ S = \frac{a^2 \sin B \,.\, \sin C}{2 \sin A},\ S = \frac{c^2 \sin A \,.\, \sin B}{2 \sin C}.$$

Diese Ausdrücke, von denen übrigens kein besonderer Gebrauch gemacht wird, lehren, aus den drei Winkeln und einer Seite eines Dreiecks seinen Flächeninhalt zu finden.

Zusatz. Setzt man $C = 90°$, wo also $\sin C = 1$ ist, so wird das Dreieck rechtwinkelig; c ist daher die Hypotenuse, und a und b sind die beiden Katheten. Alsdann ist $\sin B = \cos A$, wodurch vorhergehende Ausdrücke in folgende übergehen:

$$S = \frac{b^2 \sin A}{2 \cos A} = \tfrac{1}{2} b^2 . \operatorname{tang} A$$

$$S = \frac{a^2 \cos A}{2 \sin A} = \tfrac{1}{2} a^2 . \operatorname{cotang} A = \tfrac{1}{2} a^2 \operatorname{tang} B$$

$$S = \frac{c^2 \sin A \cos A}{2} = \tfrac{1}{4} c^2 \sin 2 A$$

Beispiel. Es sei $a = 84'$; $b = 70',48437$; $c = 109',65422$; $A = 50^\circ$.

$$
\begin{array}{lrl}
\text{Also} \quad \log b = & 1,8480928 & \\
 & 2 & \\
\hline
 & 3,6961856 & = 2 \log b \\
\log \operatorname{tang} A = & 10,0761865 & \\
\hline
 & 13,7723721 & = \log b^2 . \operatorname{tg} A \\
 & 0,30103 & \\
\hline
 & 3,4713421 & = \log S
\end{array}
$$

daher $S = 2960,27\ldots\square'$

$$
\begin{array}{lrl}
\log a = & 1,9242793 & \\
 & 2 & \\
\hline
 & 3,8485586 & = 2 \log a \\
\log \cot A = & 9,9238135 & \\
\hline
 & 13,7723721 & = \log a^2 . \cot A \\
 & 0,3010300 & \\
\hline
 & 3,4713421 &
\end{array}
$$

und $S = 2960,27\ldots\square'$

$$
\begin{array}{lrl}
\log c = & 2,0400253 & \\
 & 2 & \\
\hline
 & 4,0800506 & = 2 \log c \\
\log \sin 2A = & 9,9933515 & \\
\hline
 & 14,0734021 & = \log c^2 . \sin 2A \\
 & 0,60206 & \\
\hline
 & 3,4713421 & = \log S.
\end{array}
$$

und $S = 2960,27\ldots\square'$,

also in allen drei Fällen gleich.

§ 264. Den Flächeninhalt eines Dreiecks aus seinen drei Seiten zu berechnen.

Auflösung. Man bezeichne wieder die Seiten mit a, b, c und ihre entsprechenden Gegenwinkel mit A, B, C.

Nach Vorhergehendem ist

$$S = \tfrac{1}{2} b c \sin A.$$

Setzt man wieder $a + b + c = 2s$, also $\tfrac{1}{2}(a + b + c) = s$; so ist nach (§ 261)

$$\sin A = \frac{2}{b c} \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)};$$

folglich, wenn man diesen Werth von sin A in vorhergehende Gleichung setzt,

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

also der nämliche Ausdruck wie der oben Seite 89 ohne Hülfe der Trigonometrie gefundene.

Beispiel. Es sei a = 1245″, b = 1032″, c = 1459‴.

Nun ist $a+b+c = 2s = 3736$, also $s = 1868$, $s-a = 623$, $s-b = 836$, $s-c = 409$.

Also
$$\begin{aligned} \log s &= 3{,}2713769 \\ \log(s-a) &= 2{,}7944880 \\ \log(s-b) &= 2{,}9222063 \\ \log(s-c) &= 2{,}6117233 \\ \hline 2)\ 11{,}5997945 &= \log S^2 \\ 5{,}7998973 &= \log S. \end{aligned}$$

Also S = 630808,1 Quadratzoll.

§ 265 a. Den Halbmesser des um ein Dreieck beschriebenen Kreises aus seinen drei Seiten zu finden.

Auflösung. Es sei r der Halbmesser des Kreises; a, b, c die Seiten und A, B, C die Gegenwinkel.

Nun wird man sich aus (§ 242) erinnern, daß die halbe Seite eines solchen Dreiecks als halbe Sehne dem Sinus des gegenüberstehenden Peripheriewinkels proportional ist; es ist also

$r : \frac{1}{2} a = 1 : \sin A$; folglich $\frac{1}{2} a = r \sin A$, also

$r = \frac{a}{2 \sin A}$; eben so findet man $r = \frac{b}{2 \sin B}$ und $r = \frac{c}{2 \sin C}$

oder $r = \frac{a}{2 \sin A} = \frac{b}{2 \sin B} = \frac{c}{2 \sin C}$.

Nach (§ 261) ist aber

$$\sin A = \frac{2}{bc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

folglich

$$r = \frac{abc}{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}$$

oder, da nach (§ 264) $4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = 4S$ ist,

$$\text{I.}\quad r = \frac{abc}{4S}$$

§ 265 b. Aufgabe. Den Halbmesser des in ein Dreieck beschriebenen Kreises aus seinen drei Seiten zu finden.

Auflösung. Ist r' der gesuchte Halbmesser, S der Flächeninhalt des Dreiecks, so ist offenbar

$$S = \tfrac{1}{2} a r' + \tfrac{1}{2} b r' + \tfrac{1}{2} c r' = \frac{(a + b + c) r'}{2}$$

$$\text{folglich II.} \quad r' = \frac{2 S}{a + b + c}.$$

Also nach (§ 265 a)

$$r' = \frac{2 \sqrt{s (s - a) (s - b) (s - c)}}{a + b + c}.$$

Aus I. folgt $S = \frac{a b c}{4 r}$, und aus II. $S = \frac{(a + b + c) r'}{2}$;

und die Gleichsetzung beider Werthe giebt

$$2 r r' = \frac{a b c}{a + b + c}$$

d. h. das doppelte Product der Halbmesser des in und um das Dreieck beschriebenen Kreises ist gleich dem Product der drei Seiten, dividirt durch ihre Summe.

Fünfter Abschnitt.

Anwendungen der bisherigen Lehren auf verschiedene Gegenstände der Geometrie mit Rücksicht auf Projection, und der Mechanik.

§ 266. Aufgabe 1) Den Abstand der Sehne eines Kreisbogens von 17° 20′ vom Mittelpunkte für den Halbmesser = 3 zu finden.

Auflösung. Bezeichnet z den Abstand, so ist

$$z = 3 . \cos 8^{\circ}\, 40' = 2{,}9657.$$

2) Wie groß muß in einem Kreise der Centriwinkel sein, wenn die zugehörige Sehne $1\tfrac{1}{3}$ mal so groß als der Halbmesser ist?

Aufl. Es sei der gesuchte Winkel = x, so ist

$$r : \tfrac{2}{3} r = \sin tot : \sin \tfrac{1}{2} x,$$

$$\text{oder } 1 : \tfrac{2}{3} = \sin tot : \sin \tfrac{1}{2} x,$$

$$\text{daher für } \sin tot = 1,$$

$$\sin \tfrac{1}{2} x = \tfrac{2}{3}.$$

$$\text{Man findet } x = 83^{\circ}\, 37'\, 14''.$$

3) Den Flächeninhalt eines Kreisabschnitts zu finden, dessen zugehöriger Centriwinkel = 70° und der Halbmesser = 5 Zoll ist.

Aufl. Nach § 123, Zus. 1, Seite 80 ist der Ausschnitt $= 70 . 5^2 . 3{,}60 = 15{,}272$; das Dreieck, das von den beiden Halbmessern und der Sehne gebildet wird, ist $= 25 . \sin 35^\circ . \cos 35^\circ = \frac{25}{2} \sin 70^\circ = 11{,}746$; also der Abschnitt $= 15{,}272 - 11{,}746 = 3{,}526$ Zoll.

4) Den Flächeninhalt eines regelmäßigen 19ecks zu finden, wenn der Halbmesser des eingeschriebenen Kreises = 13 Zoll ist.

Aufl. Bezeichnet r den Halbmesser des Kreises, so läßt sich für den Flächeninhalt eines um den Kreis beschriebenen necks folgende Formel herleiten:

$$n\, r^2 \text{ lang } \frac{180^\circ}{n}.$$

In diesem Beispiel ist also $r = 13$,

$$n = 19, \text{ also } \frac{180^\circ}{n} = 9^\circ\ 28'\ 25'', 26;$$

also der gesuchte Flächeninhalt $= 19 . 13^2 . \operatorname{tg} 9^\circ\, 28'\, 25'' = 28{,}201$ Quadratzoll.

5) Man soll das Verhältniß desjenigen Kreisbogens zu seiner Sehne finden, welcher dem Halbmesser gleich ist.

Aufl. Drückt c die Sehne aus, so ist für $r = 1$, $c = 2 \sin \frac{90^\circ}{\pi}$ (vergl. § 124, Aufg. 3).

Nimmt man π der Kürze wegen zu 3,14 an, so ist $90^\circ : 3{,}14 = 28^\circ\ 39'\ 44''$; also $c = 2 \sin 28^\circ\ 39'\ 44''$. — Nach gehöriger Ausführung erhält man $c = 0{,}9593$. Da nun der Bogen = 1 ist, so ist das verlangte Verhältniß 1 : 0,9593.

6) Der Durchmesser eines schiefen Kegels sei = 16″, seine größte Seitenlinie = 192″ und kleinste = 180″; man fragt nach seinem Cubikinhalt.

Aufl. Es ist zunächst die Höhe des Kegels zu bestimmen, welches dadurch geschehen kann, daß man den Winkel sucht, den seine kleinste Seitenlinie mit der Grundfläche macht. Man denke sich nun von der Spitze bis zur Grundfläche einen Schnitt durch die Achse, so ist dieser ein Dreieck, aus dessen gegebenen Seiten nach den obigen Formeln M oder N der verlangte Winkel gefunden wird.

Man nehme hierzu etwa die Formel

$$\sin \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{(s-a)\,(s-b)}{a\,b}},$$

und betrachte a als die größte, b als die kleinste Seitenlinie und c als den Durchmesser, so muß A der gesuchte Winkel werden.

Man erhält also wegen $a = 192$, $b = 180$, $c = 16$

$$\sin \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{89}{4 . 180}}.$$

Woraus folgt $A = 41^\circ\ 10'\ 6''$.

Man bestimme ferner die Höhe des Kegels; diese ist $= 180 . \sin A$, also der Cubikinhalt des Kegels,

$$= 8^2 . \pi . 180 \sin A : 3 = 64 . 180\, \pi \sin 41^\circ\, 10'\, 6'' : 3$$
$$= 7941{,}223 \ldots \text{ Cubikzoll.}$$

7) Aus der geographischen Breite oder Polhöhe eines Orts die Größe seines Parallelkreises in deutschen Meilen zu finden.

Aufl. Es stelle Fig. 165, Seite 143, den Durchschnitt der Erde vor, g c sei der Halbmesser des Aequators, b sei der gegebene Ort, so ist g b seine geographische Breite, und b a der Halbmesser seines Parallelkreises.

Es sei nun $g c = R$, $b a = x$, so ist $2 x \pi$ der Umfang des Parallelkreises in Theilen des Halbmessers x; dann sei der Bogen g b oder die geographische Breite = w, so ist

$c b : c f = 1 : \cos w$, und wegen $c b = c g$, und $c f = a b$ ist

$$c g : a b = 1 : \cos w,$$
d. i. $$R : x = 1 : \cos w,$$
folglich $$x = R \cos w.$$

Die Einsetzung dieses Werthes von x in den Ausdruck $2 x \pi$ giebt $2 R \pi . \cos w$ in Theilen des Erdhalbmessers, der bereits bekannt ist.

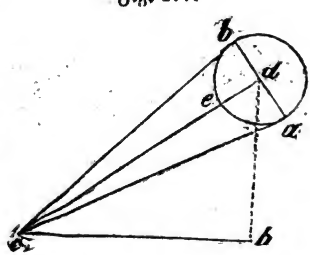
Für $w = 53^\circ\, 33'$, welches die geographische Breite Hamburgs ist, erhält man, da der Durchmesser der Erde nahe 1719 geographische Meilen enthält,

$$2 R \pi . \cos w = 1719 . \pi . \cos 53^\circ\, 33' = 3208{,}49 \text{ Meilen.}$$

8) Ein Luftballon, dessen Durchmesser 40 Fuß beträgt, steige in schiefer Richtung in die Höhe; wie weit muß er sich entfernen, wenn er nur noch in der Größe des Vollmondes erscheinen soll?

Auflösung. Wenn der Luftballon in der Größe des Vollmondes erscheinen soll, so muß sein scheinbarer Durchmesser ½ Grad betragen. (Vergl. Aufg. 14, Seite 136.)

Fig. 177.



Es stelle nun a b (Fig. 177) den Luftballon vor, und in c sei der Zuschauer, so sind die Linien c a und c b, welche Tangenten vorstellen, die Gesichtslinien; d sei der Mittelpunkt und a b der wahre Durchmesser; dieser ist aber in Beziehung auf die Gesichtslinien eben der scheinbare Durchmesser; dann ist c d die Entfernung, welche von c bis zum Mittelpunkte d angenommen wird; diese sei = x in Fußen ausgedrückt, so ist wegen $d b = d a = 20$ Fuß, und $d c b = \frac{1}{4}^\circ = 15'$

$$x : 20 = 1 : \text{tang } 15',$$
folglich $$x = 20 : \text{tang } 15'.$$

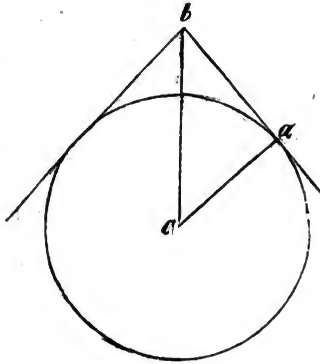
Man erhält $x = 4584{,}7$ Fuß, also ungefähr ⅛ Meile.

Zusatz. Ist dann der Winkel dch bekannt, so läßt sich auch die horizontale Entfernung ch und die Höhe hd bestimmen.

Anmerkung. Die Berührungspunkte der Gesichtslinien an der Kugel sind nicht genau die Endpunkte des Durchmessers; denn von einer Kugel können wir nie und zwar um so weniger die Hälfte übersehen, je näher sie ist. Die Genauigkeit bewährt sich aber um so mehr, je entfernter die Kugel ist.

9) Wie weit müßte man sich von der Erde entfernen, um eine Strecke von 250 Meilen übersehen zu können?

Fig. 178.



Auflösung. Es stelle der Kreis (Fig. 178) die Erde vor, c sei ihr Mittelpunkt und b der Punkt über ihrer Oberfläche, wo man die verlangte Strecke übersehen kann. Man denke sich von b eine Tangente ba an die Erde gezogen, so ist a der Punkt, bis zu welchem man von b sehen kann, oder die Weite des irdischen Horizonts von b.

Es sei nun der Erdhalbmesser $ca = cd = R$, die Verlängerung db des Erdhalbmessers $= h$, der Bogen ad oder der Winkel $c = w$, so ist

$$cb : ca = 1 : \cos w,$$

d. i. $(R+h) : R = 1 : \cos w,$

folglich

$$\text{I.}\quad h = \frac{R}{\cos w} - R, \quad \text{und} \quad \text{II.}\quad \cos w = \frac{R}{R+h}.$$

Unter obiger Strecke wird hier der Bogen ad verstanden, dessen Länge 250 Meilen beträgt, welche zunächst in Bogenmaß zu verwandeln sind. Nun gehen bekanntlich 15 deutsche oder geographische Meilen auf einen Grad des Aequators oder überhaupt eines jeden größten Kreises der Erdkugel, wenn wir die Abplattung der Erde außer Acht lassen. — Von 250 Meilen beträgt demnach das Bogenmaß $250 : 15 = 16^\circ\,40' = w$. Ferner ist der Erdhalbmesser $= 1719 : 2 = 859{,}5$ Meilen, also nach Formel I.

$$h = \frac{859{,}5}{\cos 16^\circ\,40'} - 859{,}5.$$

Nun ist

$$\begin{aligned} \log 859{,}5 &= 2{,}9342459 \\ \log \cos 16^\circ\,40' &= \underline{9{,}9813608 - 10} \quad \text{subtr.} \\ & 2{,}9528851 \end{aligned}$$

Die zugehörige Zahl dieses Logarithmen ist $= 897{,}191$; folglich $h = 897{,}191 - 859{,}5 = 37{,}691$ Meilen.

Zusatz. Für $h = R$ wird $\cos w = \frac{1}{2} = 60^\circ$, d. h. befände man sich um 1 Erdhalbmesser über der Erde, so wäre die Weite der Aussicht $= 60 . 24 = 1440$ deutsche Meilen.

Anmerkung. Ist h gegen R sehr gering, z. B. von einigen Fuß, so ist jedoch obige Formel nicht brauchbar. Man kann aber eine andere daraus ableiten, die für diese Fälle tauglich ist, wenn man nach (§ 251) $(\sin \frac{1}{2} w)^2 = \frac{1 - \cos w}{2}$ setzt, woraus sich ergiebt $\cos w = 1 - 2(\sin \frac{1}{2} w)^2$, folglich $1 - 2(\sin \frac{1}{2} w)^2 = \frac{R}{R+h}$, woraus sich hervorgeht

$$\sin \tfrac{1}{2} w = \sqrt{\frac{h}{2(R+h)}}.$$

Da aber h gegen R sehr gering ist, so kann man h im Nenner vernachlässigen und blos R statt R + h setzen, wodurch man erhält

$$\text{III.} \quad \sin \tfrac{1}{2} w = \sqrt{\frac{h}{2R}}, \quad \text{und} \quad \text{IV.} \quad h = 2R(\sin \tfrac{1}{2} w)^2.$$

Wie weit erstreckt sich z. B. in einer ebenen Gegend die Aussicht, wenn das Auge 6 Fuß über der Erde erhaben ist?

Nimmt man die deutsche Meile zu 23664 Rheinl. Fuß an, so giebt die Formel III., wenn 2 R = 1719 geogr. Meilen gesetzt wird,

$$\sin \tfrac{1}{2} w = \sqrt{\frac{6}{1719 \,.\, 23664}}.$$

Nun ist
$$\begin{aligned} \log 6 &= 0{,}7781513 \\ \log 1719 &= 3{,}2352759 \\ \log 23664 &= 4{,}3740882 \\ (7{,}6093641) &= \log 1719 \,.\, 23664 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad & 3{,}1687872 - 10 = \log 6 - \log 1719 \,.\, 23664 \\ & 1{,}5843936 - 5 \\ \text{oder} \quad & 6{,}5843936 = \log \sin \tfrac{1}{2} w. \end{aligned}$$

Also $\frac{1}{2} w = 1' 10{,}64''$; daher $w = 2' 21''$ nahe.

Nun ist $2' 21'' = 2\frac{7}{20}' = (2\frac{7}{20} : 60)^\circ = (47 : 1200)$ Grad. Wird dieser Quotient mit 15 multiplicirt, so wird das Bogenmaß auf Längenmaß reducirt, also $\frac{47}{1200} \,.\, 15 = \frac{47}{80}$ Meilen, welches sehr nahe $= \frac{3}{5}$ Meilen ist.

10) Auf offenbarer See sieht man von einem Schiffe aus, wenn das Auge 30 Fuß über der Meeresfläche erhaben ist, in einer Entfernung von ungefähr $33\frac{1}{24}$ geographischen Meilen, den Gipfel des Pico von Teneriffa. Man soll die Höhe des Berges finden.

Auflösung. Man denke sich b a (Fig. 178) verlängert und in der Verlängerung einen Punkt f, dann ziehe man c f und bezeichne den Punkt, wo c f den Kreis schneidet, mit e, so ist e f die Erhöhung des Auges über der Meeresfläche, die hier = 30 Fuß ist. Man suche nun zuerst den Bogen e a, also bis zu dem Punkte a, wo das Auge die Meeresfläche berührt und den Gipfel des Berges erblickt, in geographischen Meilen vermittelst der Formel III. in vorhergehender Aufgabe, welche nämlich ist $\sin \frac{1}{2} w = \sqrt{\frac{h}{2R}}$.

Es ist also, wenn die deutsche Meile zu 23664 Fuß und der Durchmesser der Erde zu 1719 deutschen Meilen angenommen wird,

$$\sin \tfrac{1}{2} w = \sqrt{\frac{30}{1719 \, . \, 23664}}.$$

Demnach ist $\log \sin \frac{1}{2} w = \frac{1}{2} [\log 30 - \log 1719 - \log 23664]$, woraus folgt $w = 5' \; 54'' = \frac{59}{600}$ Grad $= a\,e$.

Diese Grade geben, in Meilen verwandelt, $\frac{59}{600} . 15 = 1\frac{19}{40}$ Meilen, der Bogen $a\,d$ ist also $33\frac{7}{24} - 1\frac{19}{40} = 31\frac{49}{60}$ Meilen.

Diese Meilen sind nun wieder auf Grade zu reduciren, und man erhält $31\frac{49}{60} : 15 = 2^\circ \; 7' \; 16''$.

Die Höhe $d\,b$, welche die des Berges vorstellt, wird endlich vermittelst der Formel $h = 2R \, (\sin \frac{1}{2} w)^2$ gefunden; sonach ist

$$h = 1719 \, . \, 23664 \, . \, (\sin 1^\circ \, 3' \, 30'')^2,$$

also $$\log h = \log 1719 + \log 23664 + 2 \log \sin 1^\circ \, 3' \, 38''.$$

Nach gehöriger Ausführung findet man $h = 13873$ rheinl. Fuß nahe.

11) Man sieht den Dhawalagiri von Bengalen aus in einer Entfernung von ungefähr $50\frac{7}{20}$ geographischen Meilen; seine Höhe beträgt 27343 rheinl. Fuß. Wie hoch muß der Punkt, von wo aus man seinen Gipfel in jener Entfernung erblickt, über der Meeresfläche liegen?

Auflösung. Hier ist $d\,b$ und $d\,e$ gegeben, und es soll $e\,f$ gesucht werden (Fig. 178). Man bestimme zuerst auf die Art, wie in vorhergehender Aufgabe, die Größe des Bogens $d\,a$, aber in diesem Falle nach der Formel

$$\cos w = R : (R + h),$$

also ist $$\cos w = (2719 . 23664) : 40705759.$$

Es ist nämlich $40705759 = 1719 \, . \, 23664 + 27343$.

$$\begin{aligned} \text{Nun ist} \quad \log 1719 &= 3{,}2352759 \\ \log 23664 &= \underline{4{,}3740882} \\ &\quad 7{,}6093641 \\ \log 40705759 &= \underline{7{,}6096558} \\ &\quad 0{,}9997083 - 1 \\ \text{oder} \quad 9{,}9997083 &= \log \cos w. \end{aligned}$$

Daher $w = 2^\circ \; 6' = d\,a$.

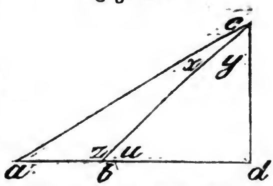
Ferner $50\frac{7}{20}$ Meilen geben $3^\circ \; 21' \; 24'' = d\,e$; also ist $a\,e = 3^\circ \; 21' \; 24'' - 2^\circ \; 6' = 1^\circ \; 15' \; 24''$.

Nun suche man $e\,f = x$ nach der Formel $h = 2R \, (\sin \frac{1}{2} w)^2$, also ist $x = 1719 \, (\sin 37' \, 42'')^2$.

Die gehörige Ausführung der Rechnung giebt $x = 4891$ Fuß nahe.

12) Die Höhe eines Gegenstandes, eines Thurmes u. s. w. zu messen, zu dem man nicht gelangen kann.

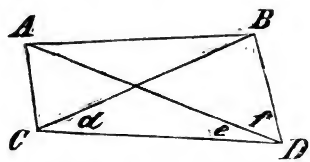
Fig. 179.



Auflösung. Es sei d c (Fig 179) dieser Thurm und man will ihn von a aus messen. Man nehme also beliebig noch einen zweiten zugänglichen Punkt b an, der mit a und c d in einer Ebene liegt, und messe die Winkel a und u. Da nun auch die Winkel z und x, dann die Standlinie a b bekannt sind, so findet man in dem Dreieck a b c nach (§ 243) die Seiten a b und b c. Es ist indeß nur nöthig, die Seite b c zu kennen. Ist nun a d horizontal, so ist b c d ein rechtwinkeliges Dreieck, dessen eine Kathete d c oder die Höhe des Thurmes leicht gefunden wird,

13) Die Entfernung zweier Punkte auf dem Felde, A und B, die beide unzugänglich sind, zu finden (Fig. 180).

Fig. 180.

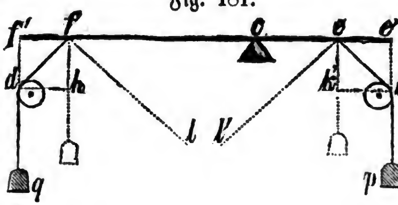


Auflösung. Man nehme zwei beliebige Punkte C, D an, messe etwa zuerst aus C die Winkel A C D und d, dann aus D die Winkel e und f, und bestimme aus den gefundenen Winkeln A C D, e und der Standlinie C D nach (§ 243) die Entfernung A D, dann aus dieser und den gemessenen Winkeln d und e + f die Entfernung D B. Aus A D, D B und dem Zwischenwinkel f wird dann die gesuchte Entfernung nach (§ 245) gefunden.

Anmerkung. Angeführte Standpunkte müssen wo möglich so gewählt werden, daß die davon abhängenden Winkel nicht zu schief werden, weil die zu schiefen oder zu spitzen Winkel weniger Genauigkeit gewähren.

14) Am Hebel f e (Fig. 181) sind ein paar Kräfte p und q nach schiefen Richtungen f d und e i unter stumpfen Winkeln a und b angebracht; man verlangt zu bestimmen, 1) unter welchen Umständen das Gleichgewicht bestehe, und 2) welchen senkrechten und horizontalen Druck die Unterlage c erleidet.

Fig. 181.



Auflösung. Man nehme f d und e i von beliebiger Größe, verlängere c f nach f′ und c e nach e′ und construire die Parallelogramme, so zerlegt sich f d in die Seitenkräfte f f′ und f h = f′ d, dann e i in e e′ und e k = e′ i.

Nun ist $df : df' = 1 : \sin dff'$

d. i. $df : df' = 1 : \sin(180^\circ - a)$

oder wegen $df' = fh$ und $\sin(180^\circ - a) = \sin a$

$q : fh = 1 : \sin a$

also $fh = q.\sin a$ die Kraft nach fh.

Eben so findet man

$ek = p \sin b$ als die Kraft nach ek.

Für den Zustand des Gleichgewichts muß also sein

$mq.\sin a = np.\sin b$,

wenn $m = cf$ und $n = ce$ ist.

Der senkrechte Druck auf c ist

$= q \sin a + p \sin b$.

Wenn die Kräfte p und q nach den Richtungen cl' und $f'l$ wirken, so daß Winkel $l'ec = iee'$ und Winkel $efl = dff'$, so bleiben sin a und sin b dieselben und der Zustand des Gleichgewichts ändert sich nicht.

Es sei $m = 6$ Fuß, $n = 4$ F., $q = 3$, $p = 5$ Centner und $a = 160$ Grad; wie groß muß der Winkel b sein für den Zustand des Gleichgewichts, und wie viel Gewicht trägt die Unterlage?

Es ist wegen $\sin 160^\circ = \sin(180^\circ - 160^\circ) = \sin 20^\circ$,

$6.3.\sin 20^\circ = 4.5.\sin b$, also

$$\sin b = \frac{18 \sin 20^\circ}{20} = \frac{9 \sin 20^\circ}{10},$$

$$\begin{aligned} \text{tog}.\sin 20^\circ &= 9{,}5340517 \\ \log 9 &= \underline{0{,}9542425} \\ & \quad 10{,}4882942 = \log 9.\sin 20^\circ \\ \log 10 &= \underline{1,\qquad\qquad} \\ & \quad 9{,}4882942 = \log b, \end{aligned}$$

Daher $b = 17^\circ\ 55'\ 40''$

b kann aber auch sein $= 180^\circ - 17^\circ\ 55'\ 40'' = 162^\circ\ 4'\ 20''$, in beiden Fällen also für den Zustand des Gleichgewichts.

Der Druck auf die Unterlage c ist

$= 3.\sin 20^\circ + 5.\sin 17^\circ\ 55'\ 40'' = 3.0{,}34202 + 5.0{,}30781$
$= 2{,}56511$ Centner.

Für den Zustand des Gleichgewichts oder für den Druck auf die Unterlage ist es gleichgiltig, ob die Kräfte nach den Richtungen fd, ci oder nach fd, el' oder nach fl, el u. s. w. wirken, d. h. wenn man statt der Hauptwinkel, den ihre Richtungen einschließen, den einen oder beide ihrer Nebenwinkel nimmt.

15) Um den Druck oder Zug gegen die Unterlage c zu bestimmen, beachte man obige Parallelogramme. In diesen ist für die Richtung der Kraft nach fd der horizontale Zug von c nach $f' = ff'$; also ist, da $\cos dfc = \cos(180^\circ - a) = -\cos a$ stattfindet,

$df : ff' = 1 : -\cos a$, oder

$q : ff' = 1 : -\cos a$, folglich

$ff' = -q.\cos a$ der Zug von c nach f'.

Eben so ist $ee' = -p.\cos a$ der Zug von c nach e'.

Nach den Grundsätzen der Trigonometrie müssen diese Größen wegen der Cosinus der Nebenwinkel **negativ** sein. Da aber die beiden Kräfte einander entgegengesetzt wirken, so muß die eine als positiv genommen werden, übrigens gleichviel, was für eine.

Will man sich aber nicht auf diese entgegengesetzten Beziehungen einlassen, so kann man beide Größen als positiv betrachten, dann muß man aber berücksichtigen, daß wegen ihrer entgegengesetzten Wirkungen ihr **Unterschied** zu bestimmen ist.

Nun ist $p \cdot \cos b = 5 \cdot \cos 17^\circ\ 55'\ 40'' = 4{,}7573$ Centner.
$q \cdot \cos a = 3 \cdot \cos 20^\circ = 2{,}8191$ „

1,9382 Centner.

Die Unterlage leidet also nach ce einen horizontalen Druck
$= 1{,}9382$ Ctr.

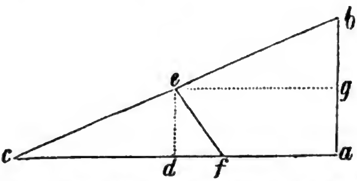
Wirken die Kräfte nach den Richtungen fl, el', so verwandelt sich der vorhergehende Zug in einem gleich starken horizontalen Druck von e und f nach c. Der Ueberschuß $= 1{,}9382$ Ctr. fällt, aber jetzt, weil die Kraft in e stärker als in f ist, nach cf hin.

Für die Richtungen der Kräfte nach fl, ei ist der horizontale Druck nach ce der Summe beider Wirkungen gleich, nämlich

$$= p \cdot \cos b + q \cdot \cos a = 7{,}5764 \text{ Ctr.}$$

16) Wie lang ist der Schatten eines 150 Fuß hohen Thurmes in dem Augenblicke, wo die Sonne 30° über dem Horizonte steht?

Fig. 182.



Auflösung. Denkt man sich vom Endpunkte des Schattens zwei gerade Linien, deren eine nach der Thurmspitze und die andere nach dem Fuße des Thums gerichtet ist, also mitten durch den Schatten geht, so bilden beide Linien einen Winkel, welcher der Höhe der Sonne gleich ist. Wäre z. B. de der Thurm und bei b die Sonne (Fig. 182), so würde dc den Schatten und der Winkel bei c die Höhe der Sonne bezeichnen.

Es sei die Länge des Schattens $= x$, so ist

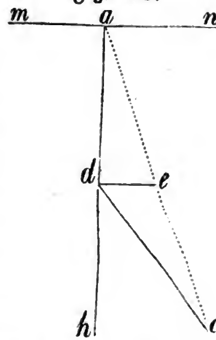
$$x : 150 = 1 : \text{tang } 30^\circ, \text{ also } x = 150 : \text{tang } 38^\circ.$$

Man findet $x = 192$ Fuß nahe.

Anmerkung. Es ist hier angenommen, daß ac in horizontaler Ebene liegt, also bei a ein rechter Winkel ist.

Es wird nicht uninteressant seyn, hier noch ein Paar ähnliche Beispiele anzuführen.

Fig. 183.



17) Es sei a c eine horizontale Tafel, auf welcher ein Stift d e in schiefer Richtung stehe; in der Erhöhung b befinde sich ein Licht, so wird dieses den Schatten d c werfen; man verlangt die Länge des Schattens.

Auflösung. Die Länge des Schattens hängt ab von der Länge des Stiftes, seiner Entfernung von a als dem Fußpunkte des Lichtes und von der Erhöhung b desselben über a; ferner findet noch eine Abhängigkeit statt, je nachdem der Stift in vertikaler Ebene ist oder nicht.

Wir wollen ihn in vertikaler Ebene annehmen, dann sei $ab = a$, $ad = b$, $de = h$, $dc = x$, der Winkel $edf = w$, so ist

$$cd + da : ab = eg : gb$$

d. i. $$(x + b) : a = eg : gb$$

Nun ist $eg = b + df = b + h \cos w$, und $gb = a - ga = a - ef = a - h \sin w$,

daher $$(x + b) : a = (b + h \cos w) : (a - h \sin w)$$

woraus folgt $$\text{I.}\quad x = (a \cos w + b \sin w)\, h : (a - h \sin w).$$

Für $w = 90^\circ$ ergiebt sich wegen $\sin 90^\circ = 1$ und $\cos 90^\circ = 0$,

$$x = bh : a.$$

Für $a = 16''$, $b = 12''$ $h = 6''$ und $w = 30^\circ$ ergiebt sich, da $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ und $\cos 30^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ ist,

$$x = (16 \,.\, \tfrac{1}{2}\sqrt{3} + 12 \,.\, \tfrac{1}{2})\, 6 : (16 - 6 \,.\, \tfrac{1}{2})$$

oder $$x = 83{,}136 : 13 = 6{,}3933 \ldots \text{ Zoll.}$$

Ist die Neigung des Stiftes entgegengesetzt, d. h. nach b hin gerichtet, so verwandelt sich obige Formel in diese

$$\text{II.}\quad x = (b \sin w - a \cos w)\, h : (a - h \sin w),$$

in welcher nur der Cosinus in die entgegengesetzte Lage gekommen ist.

Wenden wir obige Angaben wieder an, so erhalten wir

$$x = (12 \,.\, \tfrac{1}{2} - 16 \,.\, \tfrac{1}{2}\sqrt{3}) : (16 - 6 \,.\, \tfrac{1}{2}),$$

also $$x = -7{,}856 : 13 = -0{,}6043 \text{ Fuß.}$$

Der negative Werth von x zeigt an, daß der Schatten eine der früheren entgegengesetzte Lage hat.

18) Unter den übrigen Bedingungen voriger Aufgabe habe der Stift eine solche Neigung gegen die horizontale Tafel a c, daß, wenn man

durch a b eine Ebene legt, welche von der Linie d a rechtwinkelig getroffen wird, die durch den Stift gelegte Ebene mit jener Ebene parallel läuft. Man verlangt die Länge des Schattens und seine Lage gegen die Linie a c.

Auflösung. Um sich diese Darstellung zu veranschaulichen, denke man sich dieselbe von oben gesehen, so stellt m n (Fig. 83) die durch a h gelegte Ebene und d e die Projection des Stiftes, d. h. die dem Cosinus Proportionale, vor, ferner ist d c der Schatten und der Winkel c d h seine Lage gegen die Linie a h, oder, was dasselbe ist, der Nebenwinkel c d a seine Lage gegen die Grundlinie der Ebene m n.

Es sei wieder die Erhöhung des Lichtes = a, die Entfernung d a = b, die Länge des Stiftes = h, sein Neigungswinkel = w, die Länge des Schattens d c = x und der Winkel c d h = z.

Man suche zuerst die Länge der Linie a e in der Horizontalebene, welche die Projection der Linie ist, die vom Lichte bis zum Endpunkte des Stiftes geht, und welche, verlängert, auf den Endpunkt des Schattens c trifft. Diese Projection ist h cos w; daher die Projection a e, die p heißen soll, und welche die Hypotenuse des rechtwinkeligen Dreiecks a d e ist,

$$p = \sqrt{b^2 + (h \cos w)^2}$$

Ferner ist die Erhöhung des Stiftes über e, = h sin w.

Bezeichnet man ferner die Linie c e in der Ebene mit y, so ist

$$y : h \sin w = p : (a - h \sin w),$$

$$\text{folglich} \quad y = p h \sin w : (a - h \sin w).$$

Man vergleiche mit dieser Proportion die ähnliche in voriger Aufgabe.

Aus y, der Projection von d e = h . cos w und dem Zwischenwinkel d e c, läßt sich dann nach der Formel (§ 245) die Länge des Schattens und seine Lage gegen a d bestimmen.

Nun ist, wenn der Winkel a e d mit v bezeichnet wird,

$$e a : d a = 1 : \sin v,$$

$$\text{d. i.} \quad p : b = 1 : \sin v,$$

$$\text{folglich} \quad \sin v = \frac{b}{p}.$$

Also Winkel d e c = (180 − v).

Anmerkung. Es leuchtet aus diesem Beispiel ein, daß die Rechnung sehr verwickelt werden kann, wenn die Ebene, auf welcher der Stift steht, nicht horizontal ist.

Sechster Abschnitt.

Trigonometrische Auflösung der quadratischen Gleichungen.

§ 267. Die Auflösung der Gleichungen des zweiten und dritten Grades vermittelst der trigonometrischen Functionen ist von so vielfachem Interesse und für die Mathematik von so großer Wichtigkeit, daß *in diesem* Lehrbuche eine kurze Darstellung derselben nicht übergangen *werden kann.* Ich beschränke mich jedoch nur auf die *quadratischen Gleichungen.*

§ 268. Jede quadratische Gleichung *läßt sich auf die ganz allgemeine* Form bringen $x^2 + px + q = 0$,

in welcher wieder folgende vier verschiedene Fälle enthalten sind:

$$x^2 + ax + b = 0, \quad \text{und} \quad x = -\tfrac{1}{2}a \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}a^2 - b}$$
$$x^2 - ax + b = 0, \quad \text{„} \quad x = +\tfrac{1}{2}a \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}a^2 - b}$$
$$x^2 - ax - b = 0, \quad \text{„} \quad x = +\tfrac{1}{2}a \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}a^2 + b}$$
$$x^2 + ax - b = 0, \quad \text{„} \quad x = -\tfrac{1}{2}a \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}a^2 + b}$$

(vergl. meine Algebra Seite 160 u. s. w.)

Diese vier Formen lassen sich auf zwei zurückführen. Denn setzt man in der ersten und dritten $-x$ statt x, so werden beide nach derselben Ordnung $x^2 - ax + b = 0$, und $x^2 + ax - b = 0$, die erstere dieser Gleichungen stimmt also mit der zweiten, und die letztere mit der vierten der obigen vier Gleichungen überein; auch zeigt sich in den vier Auflösungen rechter Hand, daß die erste und die zweite, dann die dritte und die vierte, jedes Paar für sich dieselben Wurzeln hat, indem man nur die Zeichen vor der Wurzelgröße und des Gliedes $\pm a$ in die entgegengesetzten zu verwandeln braucht, um die Wurzeln der anderen übereinstimmenden Gleichung zu erhalten.

§ 269. Es bleiben also nur noch folgende zwei Gleichungen als Gegenstand der Betrachtung übrig:

$$x^2 - ax + b = 0, \qquad 2^2 + ax - b = 0.$$

I. Auflösung der Gleichung

$$x^2 - ax + b = 0.$$

Nach früheren Grundsätzen der Trigonometrie ist

$$\sin 2z = 2 \sin z \cos z,$$

nun erhebe man beide Seiten zum Quadrat, so folgt

$$(\sin 2z)^2 = 4 \sin^2 z \cdot \cos^2 z,$$

statt $\cos^2 z$ setze man $1 - \sin^2 z$, so ergiebt sich

$$\sin^2 2z = 4 \sin^2 z (1 - \sin^2 z) = 4 \sin^2 z - 4 \sin^4 z,$$

oder $$4 \sin^4 z - 4 \sin^2 z + \sin^2 2z = 0,$$
folglich $$\sin^4 z - \sin^2 z + \tfrac{1}{4} \sin^2 2z = 0.$$

Diese Gleichung soll nun übereinstimmend werden mit der Gleichung
$$x^2 - ax + b = 0.$$

Um aber in ersterer Gleichung eine Vergleichung mit den beiden Coefficienten a, b in letzterer Gleichung zu erhalten, so führe man in ersterer den Radius r ein, indem man alle Glieder derselben mit r^4 zu multipliciren hat, also
$$r^4 \sin^4 z - r^4 \sin^2 z + \tfrac{1}{4} r^4 \sin^2 2z = 0.$$

Man richte diese Gleichung auf folgende Weise ein:
$$1)\quad (r^2 \sin^2 z)^2 - r^2 (r^2 \sin^2 z) + \tfrac{1}{4} r^4 \sin^2 2z = 0.$$
Diese Gleichung gilt wegen der Allgemeinheit der trigonometrischen Formeln, aus denen sie abgeleitet worden ist, für jeden Werth von r und z. Vergleicht man dieselbe mit vorhergehender Gleichung
$$2)\quad x^2 - ax + b = 0,$$
so kann man r und z als zwei unbekannte Größen betrachten, die sich aus den bekannten Coefficienten a und b bestimmen lassen.

Setzt man nun $x = r^2 \sin^2 z$, so geht die Gleichung (1) in folgende über $$3)\quad x^2 - r^2 x + \tfrac{1}{4} r^4 (\sin 2z)^2,$$
welche der Gleichung (2) ganz ähnlich ist, und in welcher die Coefficienten r^2 und $\frac{1}{4} r^4 (\sin 2z)^2$ beziehungsweis mit a und b verglichen werden können.

Setzt man nun $r^2 = a$, $\frac{1}{4} r^4 (\sin 2z)^2 = b$, so kann man r und z als zwei unbekannte Größen so bestimmen, daß diesen beiden letzten Gleichungen Genüge geschieht.

Man verbinde beide Gleichungen durch Elimination von r, und bestimme eine Gleichung für sin 2 z, so erhält man
$$\text{I.}\quad \sin 2z = \frac{2\sqrt{b}}{a}.$$

Ebenso setze man in obiger Gleichung $x = r^2 \sin^2 z$ statt r^2 seinen vorigen Werth a, so ist
$$\text{II.}\quad x = a \sin^2 z.$$

Um nun x zu finden, so bestimme man zuerst aus den gegebenen Werthen a und b den Winkel z aus der Gleichung I., alsdann suche man x aus der Gleichung II.

Beispiel 1. Es sei die Gleichung gegeben:
$$x^2 - 13x + 40 = 0;$$
man soll ihre beiden Wurzeln finden.

Auflösung. Es ist $a = 13$, $b = 40$; also $\sin 2z = \frac{2}{13}\sqrt{40}$, und $x = 13 (\sin z)^2$.

Rechnung:

$$\begin{array}{rl} \log 2 & = 0{,}3010300 \\ \log \sqrt{40} & = 0{,}8010300 \\ \hline & \ 1{,}1020600 \\ \log 13 & = 1{,}1139434 \\ \hline & \ 9{,}9881166 = \log \sin 2z. \end{array}$$

Also $2z = 76^\circ\ 39'\ 27{,}4''$.

Da aber jeder Sinus zwei Winkeln angehört, die einander zu 180° ergänzen, so ist der andere Werth

$$2z = 103^\circ\ 20'\ 32{,}6'',$$

daher 1) $z = 38^\circ\ 19'\ 43{,}7''$; 2) $z = 51^\circ\ 40'\ 16{,}3''$.

Ferner ist, wegen $\log x = \log 13 + 2 \log \sin z$, für den ersteren Werth von z,

$$\begin{array}{rl} \log 13 & = 1{,}1139434 \\ 2 \log \sin 38^\circ\ 19'\ 43{,}7'' & = 0{,}5850264 - 1 \\ \hline & \ 0{,}6989698 = \log x. \end{array}$$

Also $x = 4{,}9999969$.

Und für den anderen Werth

$$\begin{array}{rl} \log 13 & = 1{,}1139434 \\ 2 \log \sin 51^\circ\ 40'\ 16{,}3'' & = 0{,}7891468 - 1 \\ \hline & \ 0{,}9030902 = \log x. \end{array}$$

Daher $x = 8{,}0000037$.

Nach der Natur der quadratischen Gleichungen muß die Summe der beiden Wurzeln dem Coefficienten des zweiten Gliedes gleich sein. Machen wir nun die Probe, so ist

$$\begin{array}{rl} x & = 4{,}9999969 \\ x & = 8{,}0000037 \\ \hline \text{die Summe} & = 13{,}0000006. \end{array}$$

Dieser Werth weicht also nur um 6 Zehnmilliontel von dem wahren ab; wir können demnach unbeschadet setzen $x = 5$, und $x = 9$. Und wirklich hat auch unsere Gleichung diese Wurzeln; denn es ist auch das letzte Glied 40 das Product beider Werthe.

Beispiel 2. Es soll folgende Gleichung aufgelöst werden:

$$x^2 - 64\,x + 720 = 0;$$

so ist $a = 64$, $b = 720$,

demnach $\sin 2z = \frac{1}{32}\sqrt{720}$, und $x = 64\,(\sin z)^2$.

Rechnung: $\log \sqrt{720} = 1,4286663$
$\log 32 = 1,5051500$

$$9,9235163 = \log \sin 2z,$$

$$2z = 56^\circ\ 59'\ 5,12'', \quad z = 28^\circ\ 29'\ 32,56''.$$

$$2 \log \sin z = 0,3569000 - 1 \qquad 2 \log \cos z = 0,8879223 - 1$$
$$\log 720 = 1,8061800 \qquad \log 720 = 1,8061800$$
$$1,1630800 = \log x \qquad 1,6941023 = \log x$$

Diese Logarithmen geben $x = \begin{cases} 14,55727 \\ 49,44272 \end{cases}$

Summe $= 63,99999$ statt 64.

Anmerkung. Da die beiden Werthe von 2 z einander zu 180° ergänzen, so müssen die von z einander zu 90° ergänzen, und der Sinus des einen ist demnach der Cosinus des andern. Es ist also überflüssig, den Winkel 2 z erst von 180°, wie bisher geschehen ist, abzuziehen; sondern man nehme von 2 z den kleinsten Werth als den Hauptwinkel, halbire ihn und bestimme den Werth von x das eine Mal nach sin z, und das andere Mal nach cos z, so daß man erhält

$$x = a \sin^2 z \quad \text{und} \quad x = a \cos^2 z.$$

Die Rechnungen der Beispiele nehmen nun folgende Gestalt an:

3) Es sei diese Gleichung aufzulösen:

$$x^2 - 12,9961\, x + 40,417108.$$

Auflösung. Es ist $a = 12,9961$, $b = 40,417108$, also

$$\sin 2z = \frac{2}{12,9961} \sqrt{40,417108}, \quad x = 12,9964\, (\sin z)^2$$

$$\log 2 = 0,3010300$$
$$\log \sqrt{b} = 0,8032826$$
$$1,1043126$$
$$\log a = 1,1138131$$
$$9,9904995 = \sin 2z$$

$$2z = 78^\circ\ 3'\ 33''; \qquad z = 39^\circ\ 1'\ 46,5''.$$

$$\log a = 1,1138131 \qquad \log a = 1,1138131$$
$$2 \log \sin z = 0,5982972 - 1 \qquad 2 \log \cos z = 0,7806418 - 1$$
$$0,7121103 = \log x \qquad 0,8944549 = \log x$$

$$x = \begin{cases} 5,153597 \\ 7,842509 \end{cases}$$

Summe $12,996106$ statt $12,9961$,

also nur um 0,000006 zu groß.

4) Es sei die Gleichung gegeben:

$$x^2 - x + \tfrac{1}{100} = 0,$$

man verlangt ihre beiden Wurzeln.

Auflösung. Es ist $a = 1$, $b = \frac{1}{100}$,
also $\sin 2z = 2\sqrt{\frac{1}{100}} = \frac{1}{5}$;
dann $x = \sin^2 z$, und $x = \cos z$.

$\log 1 - \log 5 = 0,6989700 - 1$
oder $= 9,6989700 = \log \sin 2z$

$2z = 30°$; $z = 15°$.

$2 \log \sin 15° = 8,8059924$; $2 \log \cos 15° = 9,9698876$
oder $= 0,8259924 - 2 = \log x$; oder $= 0,9698876 - 1 = \log x$
$x = 0,0669873$; $x = 0,9330128$.

Probe: $0,0669873$
$0,9330128$
$1,0000001$ statt 1.

5) Sei $x^2 + 11x + 10 = 0$.

Auflösung. Man setze $-x$ statt $+x$, so geht die Gleichung in folgende über: $x^2 - 11x + 10 = 0$.

Alsdann ist $\sin 2z = \frac{2\sqrt{10}}{11}$

$x = 11 \sin^2 z$, $x = 11 \cos^2 z$.

$\log 2 = 0,3010300$
$\log \sqrt{10} = 0,5000000$
$0,8010300$
$\log 11 = 1,0413927$
$9,7596373 = \log \sin 2z$

$2z = 35° 5' 48''$; $z = 17° 32' 54''$.

$2 \log z = 0,9586050 - 2$ $2 \log \cos z = 0,9586066,8 - 1$
$\log 11 = 1,0413927$ $\log 11 = 1,0413927$
$0,9999977 - 1 = \log x$; $0,9999999 = \log x$;

daraus folgt $x = 1$, und $x = 10$.

Da aber oben $-x$ statt $+x$ gesetzt war, oder, was dasselbe ist, da die Gleichung $x^2 + 11x + 10 = 0$ zwei negative Werthe haben muß, so sind dieselben $x = -1$ und $x = -10$.

Anmerkung. Wenn die beiden Wurzeln einer solchen quadratischen Gleichung imaginär sind, so zeigt sich diese Unmöglichkeit auch in obiger Gleichung $\sin 2z = \frac{2\sqrt{b}}{a}$. Wir wollen deshalb obige Gleichung $x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b}$ oder $x = \frac{1}{2}a \pm \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4b}$ näher ansehen.

Nämlich die Größe unter dem Wurzelzeichen, $a^2 - 4b$, läßt sich bekanntlich in folgende Factoren zerlegen $(a + 2\sqrt{b})(a - 2\sqrt{b})$.

Wenn nun $2\sqrt{b}$ größer als a ist, so ist der Factor $a - 2\sqrt{b}$ negativ, folglich auch das Product $(a + 2\sqrt{b})(a - 2\sqrt{b})$, d. i.

$a^2 - 4b$ negativ, daher die Größe $\sqrt{a^2 - 4b}$ imaginär, mithin die beiden Werthe von x ebenfalls unmöglich.

Wenn nun in der Gleichung $\sin 2z = \frac{2\sqrt{b}}{a}$ der Werth $2\sqrt{b}$ größer als a ist, so übersteigt auch der ganze Ausdruck $\frac{2\sqrt{b}}{a}$ die Einheit, der Sinus kann aber für $r = 1$ nie größer als die Einheit werden, und eben darin besteht hier das Unmögliche.

Zusatz. Wenn $2\sqrt{b} = a$ ist, so ist $\sin 2z = 1$, folglich $2z = 90^\circ$, also $z = 45^\circ$, und da $\sin 45^\circ = \cos 45^\circ$ ist, so hat in diesem Falle die Gleichung zwei gleiche Wurzeln.

Bemerkung. Es wird aus den bisherigen Beispielen einleuchten, daß die trigonometrische Auflösung der quadratischen Gleichungen besonders in den Fällen mit großem Vortheil angewendet werden kann und vor der algebraischen Auflösung derselben viele Vorzüge hat, wo a und b vielzifferige Zahlen sind.

II. Auflösung der Gleichung

$$x^2 + ax - b = 0$$

§ 270. Aus § 253 (Seite 164) ist für $x = x = z$,

$$\tang 2z = 2 \tang z : (1 - \tang^2 z),$$

oder, wenn man durchgängig mit $1 - \tang^2 z$ multiplicirt,

$$\tang 2z - \tang 2z \,.\, \tang^2 z = 2 \tang z.$$

Man ordne diese Gleichung nach den Potenzen von tang z, und dividire jedes Glied durch tang 2z, so folgt

$$\tang^2 z + \frac{2}{\tang 2z} \tang z - 1 = 0.$$

Man führe wieder, wie bei der Auflösung obiger Form, den Radius ein, und multiplicire deshalb alle Glieder der letzten Gleichung mit r^2, so folgt

$$r^2 \tang 2z + \frac{2r^2}{\tang 2z} \,.\, \tang z - r^2 = 0,$$

oder eingerichtet

$$1)\quad (r \tang z)^2 + \frac{2r}{\tang 2z} \,.\, (r \tang z) - r^2 = 0.$$

Man setze nun $r \tang z = x$, so ergiebt sich

$$2)\quad x^2 + \frac{2r}{\tang 2z}\, x - r^2 = 0.$$

Vergleicht man diese Gleichung mit der obigen

$$x^2 + ax - b = 0,$$

so giebt sie zur Bestimmung der Werthe r und z

$$\frac{2r}{\tang 2z} = a, \quad r^2 = b.$$

Man verbinde beide Gleichungen durch Elimination von r, so erhält man

$$3)\quad \operatorname{tang} 2z = \frac{2\sqrt{b}}{a}.$$

Nun ist aus (1) und (2) $r \operatorname{tang} z = x$, und wegen $r = \sqrt{b}$ ist endlich

$$4)\quad x = \sqrt{b} \,.\, \operatorname{tang} z.$$

Da tang 2 z alle Zahlenwerthe von Null bis Unendlich haben kann, so sind die Wurzeln der gegebenen Gleichung immer möglich, welches auch unsere aufgelöste Gleichung bewährt, nämlich

$$x = -\tfrac{1}{2} a \pm \sqrt{\tfrac{1}{4} a^2 + b}.$$

Da nun b als positiv angenommen worden, so ist $\frac{1}{4} a + b$ stets positiv, folglich $\sqrt{\frac{1}{4} a^2 + b}$, so wie x, stets reel.

Ferner ist zu gedenken, daß jede Tangente zu zwei Winkeln gehört. Ist nämlich w der eine Winkel, zu welchem tang w gehört, so gehört tang w immer auch zu dem Winkel 180° + w, d. h. es ist

$$\operatorname{tang} (180^\circ + w) = \operatorname{tang} w.$$

Um sich davon zu überzeugen, setze man zuerst nach (§ 234)

$$\operatorname{tang} (v + w) = \frac{\sin (v + w)}{\cos (v + w)}.$$

Nun ist bekanntlich aus früheren Lehrsätzen

$$\sin (v + w) = \sin v \,.\, \cos w + \cos v \sin w,$$
$$\cos (v + w) = \cos v \,.\, \cos w - \sin v \sin w.$$

Setzt man $v = 180^\circ$, so ist wegen $\sin 180^\circ = 0$, und $\cos 180^\circ = -1$,

$$\sin 180^\circ \cos w = 0, \quad \cos 180^\circ \sin w = -\sin w,$$
$$\sin 180^\circ \sin w = 0, \quad \cos 180^\circ \cos w = -\cos w;$$

folglich

$$\sin (180^\circ + w) = -\sin w,$$
$$\cos (180^\circ + w) = -\cos w, \text{ (vergl. § 228 u. 232)};$$

daher

$$\operatorname{tang} 180^\circ + w) = \frac{\sin (180^\circ + w)}{\cos (180^\circ + w)} = \frac{-\sin w}{-\cos w} = \frac{\sin w}{\cos w}.$$

Es ist aber auch $\frac{\sin w}{\cos w} = \operatorname{tang} w$; folglich

$$\operatorname{tang} (180^\circ + w) = \operatorname{tang} w.$$

Nun sei nach unserer gewöhnlichen Bezeichnung $w = 2z$, so ist natürlich auch

$$5)\quad \operatorname{tang} (180^\circ + 2z) = \operatorname{tang} 2z.$$

Die beiden Seiten dieser Gleichung lauten wörtlich: Die Tangente eines Winkels w oder 2 z im ersten Quadranten gehört eben so wohl auch einem Winkel im dritten Quadranten an.

Die für die Auflösung unserer Gleichung gewonnenen zwei Werthe des gesuchten Winkels sind also

$$180^\circ + 2\,z, \qquad 2\,z,$$

daher hat auch der Winkel z die beiden Werthe

$$90^\circ + z \quad \text{und} \quad z,$$

folglich hat x die beiden Werthe

$$x = \sqrt{b}\,\text{tang}\,(90^\circ + z), \quad x = \sqrt{b}\,\text{tang}\,z.$$

Nun ist

$$\text{tang}\,(90^\circ + z) = \frac{\sin\,(90^\circ + z)}{\cos\,(90^\circ + z)} = \frac{\sin 90^\circ . \cos z + \sin z . \cos 90^\circ}{\cos 90^\circ . \cos z - \sin 90^\circ . \sin z}$$

da nun $\sin 90^\circ = 1$ und $\cos 90^\circ = 0$ ist, so folgt

$$\text{tang}\,(90^\circ + z) = \frac{\cos z}{-\sin z} = -\frac{\cos z}{\sin z}.$$

Es ist aber aus § 235 (Seite 149) $\frac{\cos z}{\sin z} = \cot z$, folglich

$$\text{tang}\,(90^\circ + z) = -\cot z.$$

Die zu unserer Auflösung erforderlichen Gleichungen, welche ich der Uebersicht wegen wiederhole, sind demnach

$$\text{I.} \quad \text{tang}\,2\,z = \frac{2\sqrt{b}}{a}, \qquad \text{(aus 3.)}$$

$$\text{II.} \quad x = \sqrt{b}\,.\,\text{tang}\,z, \qquad x = -\sqrt{b}\,.\,\cot z.$$

Beispiel 1. Es sei die Gleichung aufzulösen:

$$x^2 + 25\,x - 150 = 0.$$

Auflösung. Es ist $a = 25$, $b = 150$, also $\text{tang}\,2\,z = \frac{2}{25}\sqrt{150}$.

$$\begin{array}{ll}
\log 2 & = 0{,}3010300 \\
\log \sqrt{b} & = 1{,}0880457 \\
\hline
 & \, 1{,}3890757 = \log 2\sqrt{150} \\
\log 25 & = 1{,}3979400 \\
\hline
 & \, 9{,}9911357 = \log \text{tg}\,2\,z
\end{array}$$

$$2\,z = 44^\circ\,24'\,55'', \qquad z = 22^\circ\,12'\,27{,}5''.$$

$$\begin{array}{ll}
\log \sqrt{b} = 1{,}0880457 & \log \sqrt{b} = 1{,}0880457 \\
\log \text{tang}\,z = 9{,}6109241 - 10 & \log \cot z = 10{,}3890759 - 10 \\
\hline
0{,}6989698 = \log x, & 1{,}4771216 = \log x.
\end{array}$$

Man findet $x = 5$ und $x = -30$. Eigentlich ist der ersteren Werth nur 4,999997.

Anmerkung. Jede quadratische Gleichung von der Form $x^2 + a\,x - b = 0$ hat immer eine positive und eine negative Wurzel, und zwar ist die negative die größere; ferner hat jede quadratische Gleichung von der Form $x^2 - a\,x - b = 0$ immer eine positive und eine negative Wurzel, und zwar ist hier die positive die größere. (Vergl. Beisp. 5.)

2) Es sei gegeben $x^2 + 65\,x - 7500 = 0$.

Auflösung. Es ist $a = 65$, $b = 7500$, $\tang 2z = \frac{2}{65}\sqrt{7500}$.

$$\begin{array}{lrl} \log 2 & = & 0{,}3010300 \\ \log \sqrt{b} & = & \underline{1{,}9375307} \\ & & 2{,}2385607 \\ \log 65 & = & \underline{1{,}8129134} \\ & & 10{,}4256473 = \log \tang 2\,z \end{array}$$

$2\,z = 69^\circ\ 25'\ 48''$, $\quad z = 34^\circ\ 42'\ 54''$.

$$\begin{array}{lrl} \log \sqrt{b} & = & 1{,}9375307 \\ \log \tang z & = & \underline{9{,}8406205 - 10} \\ & & 1{,}7781512 = \log x, \end{array} \qquad \begin{array}{lrl} \log \sqrt{b} & = & 1{,}9375307 \\ \log \cot z & = & \underline{10{,}1593795 - 10} \\ & & 2{,}0969102 = \log x. \end{array}$$

$x = 60$, $\quad x = 125$, ohne Rücksicht auf das Zeichen.

Die beiden Werthe von x sind also $x = 60$ und $x = -125$.

Anmerkung. Es ist eigentlich $1{,}7781513 = \log 60$, und $2{,}0969100 = \log 125$. Da aber die entsprechenden Logarithmen in der 7ten Decimalstelle nur um 1 abweichen, so sind oben angeführte Werthe so gut als genau, zumal da in der That die Summe $= 65$ und das Product $= 7500$ ist.

3) Es sei gegeben $x^2 + 779\,x - 780 = 0$.

Auflösung. Es ist $a = 779$, $b = 780$, $\tang 2z = \frac{2}{779}\sqrt{780}$.

$$\begin{array}{lrl} \log 2 & = & 0{,}3010301 \\ \log \sqrt{780} & = & \underline{1{,}4460403} \\ & & 1{,}7470774 \\ \log 779 & = & \underline{2{,}8915375} \\ & & 8{,}8555399 = \log \tang z \end{array}$$

$2\,z = 4^\circ\ 6'\ 4{,}6'$, $\quad z = 2^\circ\ 3'\ 2{,}3''$.

$$\begin{array}{lrl} \log \sqrt{780} & = & 1{,}4460473 \\ \log \tang z & = & \underline{9{,}5529520} \\ & & 0{,}9999993 - 1 = \log x, \end{array} \qquad \begin{array}{lrl} \log \sqrt{780} & = & 1{,}4460473 \\ \log \cot z & = & \underline{11{,}4460480 - 10} \\ & & 2{,}8920953. \end{array}$$

Die Werthe sind $x = 1$ und $x = -780$.

Eigentlich ist der erstere Werth um ein Weniges zu groß, der zweite um ein Weniges zu klein. Die Abweichung findet aber erst in der 7ten oder 8ten Decimalstelle statt.

4) Es sei $x^2 + \frac{7}{44}\,x - \frac{1696}{12716} = 0$,

also $a = \frac{7}{44}$, $\quad b = \frac{1696}{12716}$.

$$\begin{array}{lrl} \log 1695 & = & 3{,}2291697 \\ \log 12716 & = & \underline{4{,}1043505} \\ & & 0{,}1248192 - 1 = \log b \end{array}$$

$$\log \sqrt{b} = 0{,}5624096 - 1$$
$$\log 2 = 0{,}3010306$$
$$\overline{0{,}8634396 - 1} = \log 2\sqrt{b}$$
$$\log 44 = 1{,}6434527$$
$$\overline{1{,}5068923}$$
$$\log 7 = 0{,}8450980$$
$$\overline{10{,}6617943} = \log \operatorname{tang} 2z$$

$2z = 77^\circ\ 42'\ 31{,}71''$, $z = 38^\circ\ 51'\ 15{,}86''$.

$$\log \operatorname{tang} z = 9{,}9061115 - 10 \qquad \log \cot z = 10{,}0938885 - 10$$
$$\log \sqrt{b} = 0{,}5624096 \qquad \log \sqrt{b} = 0{,}5624096$$
$$\overline{0{,}4585211} = \log x \qquad \overline{0{,}6562981} = \log x$$

$$x = \begin{array}{r} 0{,}2941176 \\ -0{,}4532085 \end{array}$$
$$\text{Summe} = -0{,}1590909.$$

Wenn man $\frac{7}{44}$ in einen Decimalbruch verwandelt, so stimmt derselbe mit diesem Ergebniß bis zur 7ten Decimalstelle überein.

5) Es sei $x^2 - 8x - 9 = 0.$

Auflösung. Man setze, wie früher, $-x$ statt x, so nimmt die Gleichung die Gestalt an: $x^2 + 8x - 9 = 0.$

Nun ist wegen $a = 8$, $b = 9$, $\operatorname{tang} 2z = \frac{2\sqrt{9}}{8} = \frac{3}{4}$.

$$\log 3 = 0{,}4771213$$
$$\log 4 = 0{,}6020600$$
$$\overline{9{,}8750613} = \log \operatorname{tang} 2z$$

$2z = 36^\circ\ 52'\ 11{,}65''$, $z = 18^\circ\ 26'\ 5{,}83''$.

$$\log \sqrt{b} = 0{,}4771213 \qquad \log \sqrt{b} = 0{,}4771213$$
$$\log \operatorname{tang} z = 9{,}5228788 - 10 \qquad \log \cos z = 10{,}4771212 - 10$$
$$\overline{0{,}0000001} = \log x \qquad \overline{0{,}9542425} = \log x$$

$$x = 1 \quad \text{und} \quad x = -9.$$

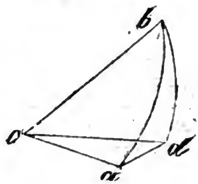
Da aber $-x$ statt x gesetzt war, so sind die Zeichen in die entgegengesetzten zu verwandeln, es ist daher

$$x = -1 \quad \text{und} \quad x = 9.$$

Siebenter Abschnitt.

Auflösung sphärischer Dreiecke.

Fig. 184 a.



§ 271. Der Theil der Oberfläche einer Kugel, welcher von drei Bogen größter Kreise eingeschlossen wird, heißt ein sphärisches Dreieck. Diese Bogen selbst nennt man die Seiten, und die von ihnen gebildeten sphärischen Winkel die Winkel des sphärischen Dreiecks. Die sphärische Trigonometrie lehrt, aus zwei oder drei gegebenen Stücken eines sphärischen Dreiecks die übrigen zu finden. Sie ist ein Theil der Lehre von den Kreisen auf der Oberfläche einer Kugel, welche man die Sphärik nennt.

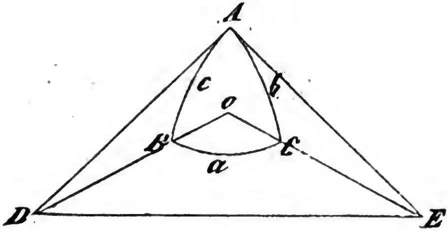
§ 272. Der sphärischen Trigonometrie wird unbedingt die Stereometrie und zwar vornehmlich die Lehre von der Lage der Ebenen gegen einander, von den körperlichen Ecken und von der Kugel vorausgesetzt. Daher verweise ich nachdrücklich auf die entsprechenden Sätze der Stereometrie.

Auch ist (§ 197) Seite 127 der sphärische Winkel nebst seinem Maße ausführlicher erklärt.

§ 273. Es sei ferner c der Mittelpunkt einer Kugel (Fig. 184 a) und c b, c d, c a drei ihrer Halbmesser im Raume, so liegen die Punkte b, d, a in der Oberfläche der Kugel und, wenn man sich über b d, b a, a d als Sehnen ihre zugehörigen Bogen denkt, so schließen diese Bogen einen Raum auf der Oberfläche der Kugel ein, welcher ein sphärisches Dreieck bildet. — Diese Bogen als Seiten des sphärischen Dreiecks sind Bogen größter Kreise und zugleich die Maße der entsprechenden ebenen Winkel b c d, b c a, a c b; die sphärischen werden aber, wie oben schon bemerkt, durch die Neigung dieser ebenen Winkel oder durch die an die Bogen bei a, b, d gelegten Tangenten gebildet. (Vergl. § 197, Fig. 160).

§ 274. Wird ein größter Kreis m f n (Fig. 160, S. 127) durch die Pole eines anderen größten Kreises a c b gelegt, so steht er auf diesem senkrecht, und wird von ihm in Quadranten getheilt; und umgekehrt, steht ein größter Kreis m f n auf einem andern größten Kreise a c b senkrecht, so geht er durch die Pole des letzteren. Wenn daher zwei Quadranten n f a, n f sich im Punkte n schneiden, und durch die Punkte a f ein größter Kreis a b gelegt wird, so ist der Punkt n ein Pol desselben.

Fig. 184 b.



§ 275. Um eine Bestimmung der gegenseitigen Beziehungen der drei Seiten und drei Winkel eines sphärischen Dreiecks festzusetzen, so sei o der Mittelpunkt einer Kugel (Fig. 184 b.), auf welcher das sphärische Dreieck A B C verzeichnet ist. Man ziehe von A die Tangenten A D, A E, an die Bogen A B und A C, welche den verlängerten Halbmesser o B, o C in den Punkten D und E treffen, so ist der ebene Winkel D A E gleich dem sphärischen Winkel B A C. Bezeichnet man nun die Winkel des sphärischen Dreiecks mit den Buchstaben A, B, C und die ihnen gegenüberliegenden Seiten nach der Ordnung mit a, b, c, so hat man die ebenen Winkel D A E = A und D o E = a, und für den Radius der Kugel = 1 ist A D = tang c und A E = tang b,

$$o\,D = \sec c, \qquad o\,E = \sec b.$$

Nämlich eine nähere Betrachtung lehrt, daß D A und E A auf A o senkrecht stehen.

Verbindet man nun die Durchschnittspunkte D und E der Tangente mit den zugehörigen Secanten mit einander, so hat man in dem ebenen Dreieck A D E,

$$DE^2 = AD^2 + AE^2 - 2\,AD\,.\,AE \cos DAE, \quad \text{oder}$$

$$1)\; DE^2 = (\text{tang } c)^2 + (\text{tang } b)^2 - \text{tang } c\,.\,\text{tang } b\,.\,\cos A.$$

Ferner im Dreieck D o E,

$$DE^2 = Do^2 + oE^2 - 2\,Do\,.\,oE\,.\cos DoE, \quad \text{oder}$$

$$2)\; DE^2 = (\sec c)^2 + (\sec b)^2 - 2 \sec c\,.\sec b\,.\cos a.$$

Zieht man die Gleichung (1) von letzterer ab, so folgt

$$(\sec c)^2 - (\text{tg} c)^2 + (\sec b)^2 - (\text{tg } b)^2 - 2 \sec c\,.\sec b\,.\cos a + 2\,\text{tg } c\,.\,\text{tg } b\,.\cos A = o.$$

Da nun

$$(\sec c)^2 - (\text{tg } c)^2 = 1,\ \sec c = \frac{1}{\cos c},\ \text{tg} c = \frac{\sin c}{\cos c} \text{ u. s. w.}$$

was dem c so wohl als dem b gilt, so ergiebt sich durch Einsetzung dieser Werthe in vorhergehende Gleichung

$$1 + 1 - \frac{2}{\cos c\,.\cos b}\,.\cos a + \frac{2\,.\sin c\,.\sin b}{\cos c\,.\cos b}\,.\cos A = o,$$

oder durchgängig durch 2 dividirt

$$1 - \frac{\cos c}{\cos c \, . \, \cos b} + \frac{\sin c \, . \, \sin b \, . \, \cos A}{\cos c \, . \, \cos b} = 0$$

und durch Wegschaffung des Nenners

$$\cos b \, . \, \cos c - \cos a + \sin c \, . \, \sin b \, . \, \cos A = 0,$$

also

3) $\cos a = \cos b \, . \, \cos c + \sin b \, . \sin c \, . \cos A,$

folglich

4) $\cos A = \frac{\cos a - \cos b \, . \, \cos c}{\sin b \, . \, \sin c}.$

Um diese Formel bequem für Logarithmen einzurichten, so addire man zu beiden Seiten die Einheit, dann erhält man § 247 u. 255.

$$1 + \cos A = \frac{\cos a - \cos b \, . \, \cos c + \sin b \, . \, \sin c}{\sin b \, . \, \sin c} = \frac{\cos a - \cos(b + c)}{\sin b \, . \, \sin c}$$

$$= \frac{2 \sin \tfrac{1}{2}(a + b + c) \, . \, \sin \tfrac{1}{2}(b + c - a)}{\sin b \, . \, \sin c}.$$

Nun ist aber $1 + \cos A = 2 (\cos \tfrac{1}{2} A)^2$, folglich

5) $\cos \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin \tfrac{1}{2}(c + b + a) \, . \, (b + c - a)}{\sin b \, . \, \sin c}}$

Subtrahirt man in (4) jede Seite von der Einheit, so erhält man in ähnlicher Weise

6) $\sin \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin \tfrac{1}{2}(a + b - c) \, . \, \sin \tfrac{1}{2}(a + c - b)}{\sin b \, . \, \sin c}}$

Dividirt man die Gleichung (6) durch die Gleichung (5), so erhält man

7) $\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin \tfrac{1}{2}(a + b - c) \, . \, \sin \tfrac{1}{2}(a + c - b)}{\sin \tfrac{1}{2}(a + b + c) \, . \, \sin \tfrac{1}{2}(b + c - a)}}.$

Multiplicirt man die Gleichungen (5) und (6) mit einander, so folgt wegen $\sin \tfrac{1}{2} A \, . \, \cos \tfrac{1}{2} A = \tfrac{1}{2} \sin A$, wenn man $\tfrac{1}{2}(a + b + c) = s$ setzt,

8) $\sin A = \frac{2 \sqrt{\sin s \, . \, \sin(s - a) \sin(s - b) \, . \, \sin(s - c)}}{\sin b \, . \, \sin c}$

und vertauscht man nach (4) die Buchstaben, so erhält man

9) $\sin B = \frac{2 \sqrt{\sin s \, . \, \sin(s - a) \sin(s - b) \, . \, \sin(s - c)}}{\sin a \, . \, \sin c}.$

Da nun in beiden letztern Gleichungen die Wurzelgrößen einander gleich sind, so folgt die Proportion:

$$\sin A : \sin B = \frac{1}{\sin b . \sin c} : \frac{1}{\sin a . \sin c}$$
$$= \frac{1}{\sin b} : \frac{1}{\sin a} .$$

Wird dann jedes Glied des zweiten Verhältnisses mit $\sin a . \sin b$ multiplicirt, so ist

$$10) \quad \sin A : \sin B = \sin a : \sin b,$$

d. h. in jedem sphärischen Dreieck verhalten sich die Sinus der Winkel wie die Sinus der ihnen gegenüberliegenden Seiten.

Daraus läßt sich ferner schließen

$$11) \quad \sin A : \sin C = \sin a : \sin c.$$

§ 276. Die Formeln 5, 6, 7, 8, 9 dienen dazu, um aus den drei Seiten eines sphärischen Dreiecks einen Winkel zu berechnen. Uebrigens kann man deshalb bei den Formeln (5) und (6) stehen bleiben, auch sind sie zweckmäßiger als die letztern, wenn der zu bestimmende Winkel groß, also größer als 90° ist; und zwar wenn der zu suchende Winkel nahe an 180° ist, so gewährt die Formel (5) noch eine größere Genauigkeit als die Formel (6), weil die Cosinus solcher Winkel (in den Tafeln) sich stark ändern und daher der Winkel mit größerer Schärfe sich bestimmen läßt.

§ 277. Aus den Proportionen (10) und (11) läßt sich aus zwei Winkeln und einer gegenüberliegenden Seite der dritte Winkel, oder aus zwei Seiten und einen Gegenwinkel die dritte Seite finden.

§ 278. Erklärung. Vier neben einander liegende Stücke eines sphärischen Dreiecks nennt man die zwei Winkel und die zwei Seiten desselben, wie sie unmittelbar auf einander folgen, z. B. der Winkel A, die Seite b, der Winkel C und die Seite a; oder die Seite a, der Winkel B, die Seite c und der Winkel A. Die zwei Winkel kann man mit den Namen: der erste Winkel und der andere Winkel unterscheiden, z. B. in den vier neben einander liegenden Stücken a, B, c, A ist B der erste, A der andere Winkel, a die Gegenseite, c die Zwischenseite.

§ 279. Lehrsatz. In jedem sphärischen Dreieck ist das Product aus dem Sinus des ersten Winkels mit der Cotangente des anderen Winkels gleich dem Producte aus der Cotangente der Gegenseite mit dem Sinus der Zwischenseite, vermindert um das Product aus dem Cosinus der Zwischenseite mit dem Cosinus des ersten Winkels.

Beweis. Dividirt man die frühere Gleichung

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b . \cos c}{\sin b . \sin c} \text{ mit } \sin A = \frac{\sin a . \sin B}{\sin b},$$

so erhält man

$$\cot A = \frac{\cos a - \cos b . \cos c}{\sin a \sin c . \sin B}.$$

Multiplicirt man nun beiderseits mit sin B und setzt statt cos b seinen Werth aus der Gleichung (3) so folgt

$$\sin B . \cot A = \frac{\cos a}{\sin a \, \sin c} - \frac{\cos c}{\sin a \, \sin c} (\cos a \cos c + \sin a \sin c \cos B).$$

Die Ausführung der Multiplication giebt, wenn überdies $1 - \sin^2 c$ statt $\cos^2 c$ gesetzt wird,

$$\sin B \, \cot A = \frac{\cos a \, \sin c}{\sin a} - \cos c \, \cos B, \text{ oder}$$

12) $\sin B \, \cot A = \cot a \, \sin c - \cos c \, \cos B.$

§ 280. **Lehrsatz.** In jedem sphärischen Dreieck ist der Cosinus des einen Winkels gleich dem Producte der Sinus der beiden anliegenden Winkel mit dem Cosinus der gegenüberliegenden Seite, vermindert um das Product der Cosinus dieser beiden Winkel.

Beweis. Die Gleichung (12) läßt sich so schreiben:

$$\frac{\sin B \, \cos A}{\sin A} = \frac{\cos a \, \sin c}{\sin a} - \cos c \, \cos B.$$

Da nun nach (§ 275) ist

$$\frac{\sin B}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin a},$$

so folgt hieraus durch Einsetzung des Werthes rechter Hand

e) $\sin b \, \cos A = \cos a \, \sin c - \sin a \, \cos c \, \cos B$

und durch Vertauschung von a mit c, und A mit C, erhält man

$$\sin b \, . \cos C = \cos c \, \sin a - \sin c \, . \cos a \, \cos B.$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit cos B, so folgt

f) $\sin b \, \cos B \, \cos C = \cos c . \sin a \, \cos B - \sin c \, \cos a \, \cos^2 B.$

Man addire ferner die Gleichungen e und f und bemerke, daß links sin b und rechts cos a sin c als gemeinschaftliche Factoren erscheinen und die Ausdrücke $- \sin a \cos c \cos B$, $+ \cos c \sin a \cos B$ sich heben, so erhält man

$$\sin b \, (\cos A + \cos B . \cos C) = \cos a \, \sin c \, (1 - \cos^2 B).$$

Nun ist $\sin b : \sin c = \sin B : \sin C$ (§ 275), also

$$\sin b = \frac{\sin c \, \sin B}{\sin c}.$$

Setzt man diesen Werth von b, dann $\sin^2 B$ *statt* $1 - \cos^2 B$ *in die* betrachtete Gleichung, so erhält man endlich

$$\cos A + \cos B \, \cos C = \cos a \, \sin B \, \sin C, \text{ oder}$$

13) $\cos A = \sin B \, \sin C \, \cos a - \cos B \, \cos C.$

§ 281. Den Formeln (5) und (6) (§ 275) gemäß, nämlich

$$\cos \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin s . \sin (s-a)}{\sin b . \sin c}}, \quad \sin \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin(s-b) . \sin(s-c)}{\sin b . \sin b}}$$

wo $s = \tfrac{1}{2}(a + b + c)$, ist auch

$$\cos\tfrac{1}{2}B = \sqrt{\frac{\sin s \,.\, \sin(s-b)}{\sin a \,.\, \sin c}},\ \sin\tfrac{1}{2}B = \sqrt{\frac{\sin(s-a)\,.\,\sin(s-c)}{\sin a \,.\, \sin c}}$$

$$\cos\tfrac{1}{2}C = \sqrt{\frac{\sin s \,.\, \sin(s-c)}{\sin a \,.\, \sin b}},\ \sin\tfrac{1}{2}C = \sqrt{\frac{\sin(s-a)\,.\,\sin(s-b)}{\sin a \,.\, \sin b}}$$

Multiplicirt man nun $\cos\frac{1}{2}A$ und $\cos\frac{1}{2}B$, dann $\sin\frac{1}{2}A$ und $\sin\frac{1}{2}B$, nebst ihren Werthen mit einander, so ist

$$\cos\tfrac{1}{2}A\,.\,\cos\tfrac{1}{2}B = \frac{\sin s}{\sin c}\sqrt{\frac{\sin(s-a)\,.\,\sin(s-b)}{\sin a\,.\,\sin b}} = \frac{\sin s}{\sin c}\,.\,\sin\tfrac{1}{2}C;$$

$$\sin\tfrac{1}{2}A\,.\,\sin\tfrac{1}{2}B = \frac{\sin(s-c)}{\sin c}\sqrt{\frac{\sin(s-a)\,.\,\sin(s-b)}{\sin a\,.\,\sin b}}$$

$$= \frac{\sin(s-c)}{\sin c}\,.\,\sin\tfrac{1}{2}C.$$

Addirt man beide Ausdrücke, so erhält man

$$\cos\tfrac{1}{2}(A-B) = \left(\frac{\sin s + \sin(s-c)}{\sin c}\right).\sin\tfrac{1}{2}C \quad (\S\ 248)$$

und durch Subtraction des letztern von erstern ergiebt sich

$$\cos\tfrac{1}{2}[A+B] = \left[\frac{\sin s - \sin(s-c)}{\sin c}\right].\ \sin\tfrac{1}{2}C.$$

Nun ist $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ und $s-c = \frac{1}{2}(a+b-c)$, also $\sin s + \sin(s-c) = \sin\frac{1}{2}(c+b+c) + \sin\frac{1}{2}(a+b-c)$
$= 2\sin\frac{1}{2}(a+b)\,.\,\cos\frac{1}{2}c,$
und $\sin s + \sin(s-c) = \sin\frac{1}{2}(a+b+c) - \sin\frac{1}{2}(a+b-c)$
$= 2\cos\frac{1}{2}(a+b)\,.\,\sin\frac{1}{2}c.$

Da ferner $\sin c = 2\sin\frac{1}{2}c\,.\,\cos\frac{1}{2}c$, also

$$\sin\tfrac{1}{2}c = \frac{\sin c}{2\cos\frac{1}{2}c},\ \text{und}\ \cos\tfrac{1}{2}c = \frac{\sin c}{2\sin\frac{1}{2}c}\ \text{ist},$$

so erhält man durch Substitution dieser Werthe in letzten Gleichungen, indem in Zähler und Nenner die Zahl 2 sich hebt,

$$\sin s + \sin(s-c) = \frac{\sin\frac{1}{2}(a+b)\ \sin c}{\sin\frac{1}{2}c},$$

$$\sin s - \sin(s-c) = \frac{\cos\frac{1}{2}(a+b)\ \sin c}{\cos\frac{1}{2}c},$$

daher, indem auch $\sin c$ im Zähler und Nenner sich heben,

$$1)\quad \cos\tfrac{1}{2}(A+B) = \frac{\cos\frac{1}{2}(a+b)\sin\frac{1}{2}C}{\cos\frac{1}{2}c},$$

$$2)\quad \cos\tfrac{1}{2}(A-B) = \frac{\sin\frac{1}{2}(a+b)\sin\frac{1}{2}C}{\sin\frac{1}{2}c},$$

Multiplicirt man ferner $\sin \frac{1}{2} A$ mit $\cos \frac{1}{2} B$, dann $\cos \frac{1}{2} A$ mit $\sin \frac{1}{2} B$ nebst ihren Werthen, so erhält man in ähnlicher Weise

$$\sin \tfrac{1}{2} A \cdot \cos \tfrac{1}{2} B = \frac{\sin (s-b)}{\sin c} \sqrt{\frac{\sin s \cdot \sin (s-c)}{\sin a \cdot \sin b}}$$
$$= \frac{\sin (s-b)}{\sin c} \cdot \cos \tfrac{1}{2} C,$$

$$\cos \tfrac{1}{2} A \cdot \sin \tfrac{1}{2} B = \frac{\sin (s-a)}{\sin c} \sqrt{\frac{\sin s \cdot \sin (s-c)}{\sin a \cdot \sin b}}$$
$$= \frac{\sin (s-a)}{\sin c} \cdot \cos \tfrac{1}{2} C.$$

Die Summe dieser Ausdrücke giebt

$$\sin \tfrac{1}{2} (A+B) = \frac{[\sin (s-a) + \sin (s-b)] \cdot \cos \tfrac{1}{2} C}{\sin c}$$
$$= \frac{[\sin \tfrac{1}{2} (b+c-a) + \sin \tfrac{1}{2} (a+c-b)] \cdot \cos \tfrac{1}{2} C}{\sin c}$$

und ihre Differenz

$$\sin \tfrac{1}{2} (A-B) = \frac{[\sin (s-a) - \sin (s-b)] \cdot \cos \tfrac{1}{2} C}{\sin c}$$
$$= \frac{[\sin \tfrac{1}{2} (a+c-b) - \sin \tfrac{1}{2} (b+c-a)] \cdot \cos \tfrac{1}{2} C}{\sin c}$$

Nun ist auf ähnliche Art wie oben

$$\sin \tfrac{1}{2} (b+c-a) + \sin \tfrac{1}{2} (a+c-b) = 2 \sin \tfrac{1}{2} c \cdot \cos \tfrac{1}{2} (a-b),$$
$$\sin \tfrac{1}{2} (b+c-a) - \sin \tfrac{1}{2} (a+c-b) = 2 \cos \tfrac{1}{2} c \cdot \sin \tfrac{1}{2} (a-b).$$

Setzt man diese Werthe ein, so erhält man

$$3) \quad \sin \tfrac{1}{2} (A+B) = \frac{\cos \tfrac{1}{2} (a-b) \cdot \cos \tfrac{1}{2} C}{\cos \tfrac{1}{2} c}$$

$$4) \quad \sin \tfrac{1}{2} (A-B) = \frac{\sin \tfrac{1}{2} (a-b) \cdot \cos \tfrac{1}{2} C}{\sin \tfrac{1}{2} c}$$

Dividirt man nun die Formel (3) durch (1), und (4) durch (2), so ergiebt sich:

$$5) \quad \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} (A+B) = \frac{\cos \tfrac{1}{2} (a-b)}{\cos \tfrac{1}{2} (a+b)} \cdot \cot \tfrac{1}{2} C$$

$$6) \quad \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} (A-B) = \frac{\sin \tfrac{1}{2} (a-b)}{\sin \tfrac{1}{2} (a+b)} \cdot \cot \tfrac{1}{2} C$$

..rt man ferner (2) durch (1), und (4) durch (3), so findet man

$$7)\quad \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(a+b) = \frac{\cos \frac{1}{2}(A-B)}{\cos \frac{1}{2}(A+B)} \cdot \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} c$$

$$8)\quad \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(a-b) = \frac{\sin \frac{1}{2}(A-B)}{\sin \frac{1}{2}(A+B)} \cdot \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} c$$

Diese vier letzten Formeln sind unter dem Namen der Neper'schen Analogieen bekannt; sie dienen dazu, um aus zwei Seiten und dem Zwischenwinkel eines sphärischen Dreiecks die beiden übrigen Winkel, oder auch nur aus zwei Winkeln und der Zwischenseite die beiden andern Seiten logarithmisch zu finden.

Das rechtwinkelige Dreieck.

§ 282. Erklärung. Wenn in einem sphärischen Dreieck ein Winkel ein rechter ist, so heißt das Dreieck ein rechtwinkeliges Dreieck, die dem rechten Winkel gegenüberstehende Seite seine Hypotenuse, und die beiden anderen Seiten desselben die Katheten; also dieselben Benennungen wie beim ebenen Dreieck.

Wird in einem schiefwinkeligen sphärischen Dreiecke von einer Winkelspitze ein Bogen eines größten Kreises senkrecht auf die gegenüberstehende Seite gefällt, so nennt man diesen Bogen das Perpendikel. Dadurch zerfällt die gegenüberstehende Seite und der Winkel an der Spitze in zwei Theile, welche Segmente oder Abschnitte genannt werden. Ein solches Perpendikel kann entweder innerhalb oder außerhalb des sphärischen Dreiecks zu stehen kommen; im letzteren Falle wird, wie an und für sich einleuchtet, ein Segment größer als dessen Seite, und einer der beiden Abschnitte größer als der Winkel.

Die rechtwinkeligen Dreiecke können entweder einen oder zwei oder drei rechte Winkel haben; bei den letzteren sind alle Seiten Quadranten, bei den zweiten sind die den rechten Winkeln gegenüberstehenden Seiten Quadranten. Es bleibt demnach in beiden Arten von rechtwinkeligen Dreiecken nichts zu bestimmen übrig. Daher wird in der Folge nur von solchen Dreiecken die Rede sein, welche blos einen rechten Winkel haben.

§ 283. Setzt man in der Gleichung (3), S. 205, den Winkel $A = 90°$, so wird das Dreieck rechtwinkelig; es ist dann $\cos A = 0$, folglich

$$\text{I.}\quad \cos a = \cos b \cdot \cos c.$$

Hingegen ist $\sin 90° = 1$; also folgt aus (10) (S. 206)

$$\text{II.}\quad \sin b = \sin a \cdot \sin B;$$

und aus (11) $\text{III.}\quad \sin c = \sin a \cdot \sin C.$

Vertauscht man in (3) S. 205, a mit b und A mit B, und setzt statt $\cos b$ seinen Werth in die Gleichung $\cos a = \cos b \cdot \cos c$, so ist

$$\cos a = \cos c\,(\cos a \cdot \cos c + \sin a, \sin c \cdot \cos B)$$
$$= \cos a \cdot \cos^2 c + \sin a \cdot \sin c \cdot \cos c \cdot \cos B.$$

Schreibt man nun $1 - \sin^2 c$ statt $\cos^2 c$, so hebt sich auf beiden Seiten $\cos a$, und man erhält, wenn überdieß die erhaltene Gleichung durch $\sin c$ dividirt wird,

$$\cos a \,.\, \sin c = \sin a \,.\, \cos c, \cos B,$$

d. i. $$\frac{\sin c}{\cos c} = \frac{\sin a}{\cos a} \,.\, \cos B,$$

oder IV. $$\operatorname{tg} c = \operatorname{tg} a \,.\, \cos B.$$

Multiplicirt man die Gleichung $\cos a = \cos b \,.\, \cos c$ mit $\cos c$, so wird dieselbe

$$\cos a \,.\, \cos c = \cos b \,.\, \cos^2 c.$$

Setzt man den Werth rechter Hand in die Gleichung

$$\cos B = \frac{\cos b - \cos a \,.\, \cos c}{\sin a \,.\, \sin c},$$

wo in (4), Seite 205, A mit B und a mit b verwechselt ist, so folgt

a) $$\cos B = \frac{\cos b - \cos b \,.\, \cos^2 c}{\sin a \,.\, \sin c} = \frac{(1 - \cos^2 c) \cos b}{\sin a \,.\, \sin c} = \frac{\cos b \,.\, \sin c}{\sin a}$$

Setzt man dann aus (2) statt $\sin a$ seinen Werth $\frac{\sin b}{\sin B}$ ein, so erhält man

$$\cos B = \frac{\cos b \,.\, \sin c \,.\, \sin B}{\sin b},$$

oder $$\frac{\cos B}{\sin B} = \frac{\cos b}{\sin b}, \sin c,$$

d. i. $$\cot B = \sin c \,.\, \cot b,$$

oder V. $$\operatorname{tg} B = \sin c \,.\, \operatorname{tg} b.$$

Substituirt man in vorhergehender Gleichung (a) statt $\sin a$ dessen Werth $\frac{\sin c}{\sin C}$, aus (3), so folgt

$$\cos B = \frac{\cos b \,.\, \sin c \,.\, \sin C}{\sin c} = \cos b \,.\, \sin C,$$

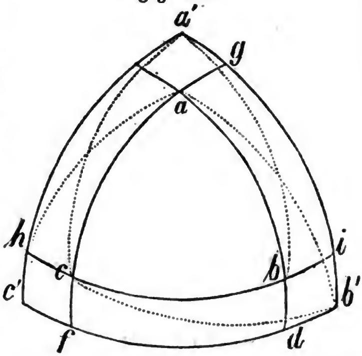
also IV. $$\cos b = \frac{\cos B}{\sin C}.$$

Setzt man nun aus der bekannten Gleichung, $\cos a = \cos b \,.\, \cos c$, den Werth von $\cos b = \frac{\cos a}{\cos c}$ wiederum in obige Gleichung (a), so ergiebt sich

VII. $$\cos B = \frac{\cos a}{\cos c} \,.\, \frac{\sin c}{\sin a} = \frac{\cos a}{\sin a} \,.\, \frac{\sin c}{\cos c} = \cot a \,.\, \operatorname{tg} c.$$

Das Polardreieck.

Fig. 185.



§ 284. Erklärung. Verlängert man die Seiten eines sphärischen Dreiecks a b c (Fig. 185) beiderseits so, bis sie zu Quadranten werden, macht man nämlich a d = b e = 90°, a f = c g = 90°, b h = c i = 90°, und führt durch die Punkte auf der Oberfläche der Kugel, d und f, e und h, g und i Bogen größter Kreise, die sich gegenseitig daselbst in den Punkten a', b', c' schneiden, so entsteht ein zweites sphärisches Dreieck a' b' c', welches ein Polardreieck des sphärischen a b c, und umgekehrt, dieses ein Polardreieck von jenem genannt wird.

§ 285. Lehrsatz. Bei Polardreiecken ergänzen die Seiten des einen Dreiecks die gegenüberliegenden Winkel des anderen, und die Winkel des ersteren die gegenüberstehenden Seiten des anderen Dreiecks zu 180°, d. i. bezeichnet man die Seiten des Dreiecks a b c mit a, b, c und die des Polardreiecks mit a', b', c', dann die gegenüberliegenden Winkel des ersten Dreiecks nach derselben Ordnung mit A, B, C und des Polardreiecks mit A', B', C', so ist

$$A + a' = B + b' = C + c' = 180°;$$
$$\text{und } A' + a = B' + b = C' + c = 180°.$$

Beweis. Da a d, a f Quadranten sind, so ist A der Pol des Bogens d f (§ 274), daher, wenn man die Bogen a b', a c' größter Kreise zieht, ist a b' = a c' = 90° und der Bogen d f das Maß des sphärischen Winkels A.

Ferner ist, weil c i = c g = 90° ist, c der Pol des Bogens g i, sonach c b' = c a' = 90°; weiter ist c b' = 90°, a b' = 90°, folglich ist b' der Pol des Bogens a c, mithin b' f = 90°, und eben so folgt der Bogen c' d = 90°. Man hat also

$$b'c' = a' = b'f + c'd - df = 180° - A$$

oder $A + a' = 180°$, und ebenso folgt $B + b' = C + c' = 180°$.

Da ferner b c = b h = 90° ist, so ergiebt sich b a' = 90°, oder a' ist der Pol des Bogens b c, mithin der sphärische Winkel h a i hat den Bogen h i zum Maße. Nun ist

$hi = bh + ci - bc$, $A' = 180° - a$, daher $A' + a = 180°$.

In gleicher Weise folgt

$$B' + b = C' + c = 180°$$

diese Ausdrücke lehren, daß jeder Winkel eines sphärischen Dreiecks die auf seinen Schenkeln senkrechte Seite seines Polardreiecks, jede Seite aber den mit seinen Schenkeln auf ihm senkrecht stehenden Winkel des Polardreiecks zu 180° ergänzt.

§ 286. Dieser Lehrsatz gewährt in der sphärischen Trigonometrie den ersprießlichen Vortheil, daß man vermöge desselben in jeder zwischen den Seiten und Winkeln eines sphärischen Dreiecks allgemein bestehenden Beziehung (Relation) von diesen auf jene, und umgekehrt, sehr leicht schließen, also statt der Seiten a′, b′, c′ eines Kugeldreiecks ihre Supplemente 180° — A, 180° — B, 180° — C setzen kann, und so umgekehrt.

Da z. B. nach obiger Gleichung (3), S. 205, in einem sphärischen Dreieck a′ b′ c′, $\cos a' = \cos b' \cos c' + \sin b' \sin c \cos A'$ ist, und die Seiten durch die Supplemente ersetzt werden, so erhält man

$$-\cos A = \cos B \cos C - \sin B \sin C . \cos a.$$

Die Anwendung dieses Lehrsatzes wird in der Folgr von Nutzen sein.

Aus den bisherigen Lehren lassen sich mehrere wichtige Eigenschaften der sphärischen Dreiecke folgern, wie nachstehende Sätze zeigen.

§ 287. Lehrsätze.

I. In einem sphärischen Dreieck ist die Summe je zweier Seiten größer als die dritte.

Beweis. In dieser Absicht wollen wir folgende, bereits oben S. 205 vorkommende Formel betrachten:

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{\sin \frac{1}{2}(c + a - b) . \sin \frac{1}{2}(a + b - c)}{\sin b . \sin c}.$$

Da vermöge der Herleitung dieser Formeln die einzelnen Größen a, b, c als wesentlich positive Größen angenommen sind, so kann die Gleichung nur dann bestehen, wenn beide Factoren im Zähler einerlei Zeichen haben, d. h. entweder positiv oder beide negativ sind. Wir wollen sie beide negativ nehmen, also müßte sein $b > c + a$, ingleichen $c > a + b$.

Man setze $c = a + b + d$, wo d den Ueberschuß bedeutet, so ist

$c + a - b = 2a + d$ also positiv, und

$a + b - c = -d$ also negativ;

folglich wäre, da beide Factoren ungleichartige Vorzeichen haben, das Product negativ, welches unmöglich ist, daher $\sin \frac{1}{2} A$ imaginär, welches ein offenbarer Widerspruch ist.

Es muß also, wenn wir die beiden andern dahin gehörenden Formeln mit in Erwägung ziehen, stets stattfinden

$$a + b > c;\ a + c > b;\ b + c > a.$$

II. In einem sphärischen Dreieck steht dem größerem Winkel auch die größere Seite gegenüber, und so umgekehrt.

Beweis. Da die sphärischen Winkel als Neigungswinkel der Ebenen, in denen die Seiten eines sphärischen Dreiecks liegen, die Grenze 180° nicht übersteigen, so ist auch jede Seite eines sphärischen Dreiecks kleiner als der halbe Umfang eines größten Kugelkreises, daher behalten die Ausdrücke $\cos \frac{1}{2} C$ und $\sin \frac{1}{2} C$ u. s. w. in obigen Formeln stets ihr positives Vorzeichen.

Nun ist nach § 281, S. 208 u. 209,

$$\frac{\cos \frac{1}{2} C}{\sin \frac{1}{2} C} = \frac{\sin \frac{1}{2}(A - B)}{\sin \frac{1}{2}(a - b)} . \frac{\sin \frac{1}{2}(a + b)}{\cos \frac{1}{2}(A - B)}$$

Ist also $A > B$, so ist $A - B$ positiv, demnach auch $a - b$ positiv, also $a > b$; und umgekehrt, wenn $a > b$, so folgt stets $A > B$.

III. Die Summe der Seiten eines sphärischen Dreiecks ist immer kleiner als der Umfang eines größten Kreises, d. i. kleiner als 360°.

Beweis. Zu dieser Untersuchung wollen wir die frühere Gleichung (§ 281) wählen; nämlich

$$\cos^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{\sin s . \sin (s - a)}{\sin b . \sin c}.$$

Damit also diese Gleichung für A einen möglichen Werth liefere, muß ihre zweite Seite (zur Rechten) positiv sein, welches, da $\sin (s - a)$, $\sin b$, $\sin c$, wie (I.) gezeigt ist, immer positive Größen sind, nur dann stattfinden kann, wenn $\sin s$ positiv, folglich s kleiner als 180° ist, woraus folgt

$$2s < 360^\circ$$

oder $$a + b + c < 360^\circ.$$

IV. Die Summe zweier Winkel eines sphärischen Dreiecks übersteigt den dritten Winkel um weniger als 180°, d. h.

es ist
$$B + C - A < 180^\circ$$
$$C + A - B < 180^\circ$$
$$A + B - C < 180^\circ.$$

Beweis. Setzt man in (I.) statt der Seiten die Supplemente ihrer Gegenwinkel, so folgt

$$360^\circ - B - C > 180^\circ - A$$
$$360^\circ - C - A > 180^\circ - B$$
$$360^\circ - A - B > 180^\circ - C.$$

Wäre nun z. B. A größer als 180°, d. h. überstiege der Winkel A die beiden Winkel B, C um mehr als 180°, so würde $180^\circ - A$ negativ, daher müßte auch $B + C$ größer als 360°, d. h. $360^\circ - (B + C)$ negativ werden, also ein Widerspruch.

V. Die Summe der Winkel eines sphärischen Dreiecks ist größer als 2 rechte und kleiner als 6 rechte Winkel, die Summe liegt also zwischen 180° und 540°.

Beweis. Da die Seiten a, b, c des sphärischen Dreiecks, also auch ihre Summe wesentlich positive Größen sind, so hat man der Vergleichung (III.) gemäß,

$$a + b + c < 360^\circ,$$

folglich wenn man für die Seiten die Ergänzungen ihrer Gegenwinkel setzt

$$540^\circ - (A + B + C) < 360^\circ,$$

woraus sogleich folgt

$$180^\circ < A + B + C < 540^\circ.$$

§ 288. Erklärung. Zwei Stücke eines sphärischen Dreiecks heißen gleichartig, wenn sie beide in demselben Quadranten liegen, d. h. zwischen 0 und 90°, oder zwischen 90° und 180° enthalten sind. Im Gegentheil heißen die Stücke ungleichartig. Z. B. in einem

sphärischen Dreieck ist die Summe zweier Seiten mit der Summe ihrer Gegenwinkel gleichartig, d. i. zugleich entweder größer, oder eben so groß, oder kleiner als 180°; und die Vergleichung besteht nämlich so:

für $a + b = 180°$ muß sein $A + B = 180°$
„ $a + b > 180°$ „ „ $A + B > 180°$
„ $a + b < 180°$ „ „ $A + B < 180°$.

Folglich findet auch das Umgekehrte statt.

Auflösung der sphärischen Dreiecke.

A. Rechtwinkelige Dreiecke.

1) In einem rechtwinkeligen sphärischen Dreiecke sind gegeben die beiden Katheten; man sucht die Hypotenuse und die beiden Winkel.

Auflösung. Die Gleichung (1) giebt die Hypotenuse a aus den beiden Katheten b und c.

Es sei $b = 60° \, 40'$, $c = 50° \, 20'$,
also $\cos a = \cos 60° \, 40' \, . \cos 50° \, 20'$.

$$\begin{aligned} \log \cos 60° \, 40' &= 9{,}6900983 \\ \log \cos 50° \, 20' &= \underline{9{,}8050385} \\ & 9{,}4951368, \end{aligned}$$

also $a = 71° \, 46' \, 40''$.

Den Winkel B findet man aus Formel (II.), oder (V.). Aus (II.) haben wir

$$\sin B = \frac{\sin b}{\sin a} = \frac{\sin 60° \, 40'}{\sin 71° \, 46' \, 40''}$$

$$\begin{aligned} \log \sin 60° \, 40' &= 9{,}9404091 \\ \log \sin 71° \, 46' \, 40'' &= \underline{9{,}9778833} \\ & 9{,}9725256, \end{aligned}$$

also $B = 66° \, 32' \, 20''$.

Aus Formel (V.) finden wir den Winkel B durch b und c direct, ohne erst a zu kennen. Wir haben also

$$\operatorname{tg} B = \frac{\operatorname{tg} b}{\sin c} = \frac{\operatorname{tg} 60° \, 40'}{\sin 50° \, 20'},$$

wodurch wir dasselbe Resultat erhalten.

Der zweite Winkel C ergiebt sich aus (VI.)

2) Es sei $b = 140°$, $c = 50° \, 20'$, und man verlange die übrigen Stücke. Es ist

$$\cos a = \cos 120° . \cos c = 50° \, 20' = \cos (180° - 120°) . \cos 50° \, 20'$$
$$= - \cos 60° . \cos 50° \, 20'.$$

$$\begin{aligned} \log . \cos 60° &= 9{,}6989700 \\ \log . \cos 50° \, 20' &= \underline{9{,}8050385} \\ & 9{,}5040085. \end{aligned}$$

Diesem Logarithmen entspricht ein Winkel = 70° 23′ 17″; da aber obiger Ausdruck negativ ist, so muß a ein stumpfer Winkel sein. Es ist also

$$a = 180° - 71° 23' 17'' = 108° 36' 43''.$$

Um den Winkel B zu finden, nehme man wieder die Formel (V.) Es ist also

$$\text{tg } B = \frac{\text{tg } 120°}{\sin 50° 20'} = - \frac{\text{tg } 60°}{\sin 50° 20'}$$

$$\begin{aligned} \log.\text{tg } 60° &= 10{,}2385606 \\ \log.\sin 50° 20' &= \underline{9{,}8863616} \\ & 10{,}3521990 = \log \text{tg } B. \end{aligned}$$

Diesem Logarithmen gehört in den Tafeln ein Winkel = 60° 2′ 18″. Da aber obiger Ausdruck durch die Tangente eines stumpfen Winkels negativ ist, so muß auch B stumpf seyn. Es ist also

$$\text{W. } B = 180° - 60° 2' 18'' = 119° 57' 42''.$$

Denselben Werth würde man auch, wie im vorigen Beispiel, durch die Formel (II.) erhalten haben, nämlich

$$\sin B = \frac{\sin b}{\sin a} = \frac{\sin 120°}{\sin 108° 36' 43''} = \frac{\sin 60°}{\sin 71° 23' 17''}$$

$$\begin{aligned} \log \sin 60° &= 9{,}9375306 \\ \log \sin 71° 23' 17'' &= \underline{9{,}9766718} \\ &= 9{,}9608588 = \log \sin B. \end{aligned}$$

Also B = 66° 2′ 17″.

3) Es sind die beiden Winkel B und C gegeben; man will die übrigen Stücke finden.

Auflösung. Aus (VI.) erhält man die eine Kathete und aus (IV.) die Hypotenuse.

Es sei A = 80° und C = 120°, so ist aus (VI)

$$\cos b = \frac{\cos B}{\sin C} = \frac{\cos 80°}{\sin 120°} = \frac{\cos 80°}{\sin 60°}$$

$$\begin{aligned} \log \cos 80° &= 9{,}2396702 \\ \log \sin 60° &= \underline{9{,}9375306} \\ &= 9{,}3021396 = \log \cos b. \end{aligned}$$

Folglich b = 78° 25′.

B. Auflösung der schiefwinkeligen Dreiecke.

§ 289. Die bei der Auflösung der schiefwinkeligen sphärischen Dreiecke vorkommenden Fälle lassen sich am einfachsten nach den bekannten Stücken ordnen, wodurch man folgende sechs Fälle unterscheidet. Es können nämlich gegeben sein

I. drei Seiten;
II. drei Winkel;
III. zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel;

IV. zwei Winkel und die eingeschlossene Seite;
V. zwei Seiten und ein Gegenwinkel;
VI. zwei Winkel und eine Gegenseite.

Erster Fall. Gegeben die drei Seiten a, b, c, und gesucht die Winkel A, B, C.

Aus den (§ 275) aufgestellten bekannten Formeln

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \,.\, \cos c}{\sin b \,.\, \sin c}$$

$$\cos B = \frac{\cos b - \cos b \,.\, \cos c}{\sin a \ \sin c}$$

$$\cos C = \frac{\cos c - \cos a \,.\, \cos b}{\sin a \ \sin b}$$

haben wir hergeleitet, wenn $s = \frac{a + b + c}{2}$ ist,

$$\sin \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin (s-b) \ \sin (s-c)}{\sin b \,.\, \sin c}}$$

$$\sin \tfrac{1}{2} B = \sqrt{\frac{\sin (s-a) \ \sin (s-c)}{\sin a \ \sin c}}$$

$$\sin \tfrac{1}{2} C = \sqrt{\frac{\sin (s-a) \ \sin (s-b)}{\sin a \ \sin b}}$$

und auch

$$\cos \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin s \,.\, \sin (s-a)}{\sin b \,.\, \sin c}}$$

$$\cos \tfrac{1}{2} B = \sqrt{\frac{\sin s \,.\, \sin (s-b)}{\sin a \,.\, \sin c}}$$

$$\cos \tfrac{1}{2} C = \sqrt{\frac{\sin s \,.\, \sin (s-c)}{\sin a \,.\, \sin b}}$$

Aus diesen letzten Formeln, die oben (§ 275) schon vorkommen, und welche für die Berechnung mit Logarithmen bequem eingerichtet sind, werden aus den gegebenen drei Seiten die Winkel gefunden.

Anmerkung 1. Was die Genauigkeit der Rechnung in besonderen Fällen anbelangt, so ist es besser, den Sinus des halben Winkels zu berechnen, wenn der zu bestimmende Winkel sehr klein ausfällt; den Cosinus aber, wenn dieser Winkel nahe an 90° ist.

Anmerkung 2. Die Winkel A, B, C werden hier immer mit Bestimmtheit gefunden, d. h. es kann nicht der zweideutige Fall eintreten, ob der Hauptwinkel oder sein Nebenwinkel zu nehmen sei.

Beispiel 1. Es sei $a = 120^\circ$, $b = 80^\circ$, $c = 60^\circ$, $s = 130^\circ$, $s-a = 10^\circ$, $s-b = 50^\circ$, $s-c = 70^\circ$.

Für die Bestimmung des Winkels A ist, wenn wir die Formel für den Cosinus des halben Winkels nehmen, nämlich

$$\cos \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin s . \sin (s-a)}{\sin b . \sin c}}$$

$$\log \cos \tfrac{1}{2} A = \tfrac{1}{2} [\log \sin s + \log \sin (s-a) - \log \sin b - \log \sin c].$$

Also wegen $\sin 130^\circ = \sin 50^\circ$.

$$\begin{aligned} \log \sin s &= 9{,}8842540 \\ \log \sin (s-a) &= 9{,}2396702 \\ & \overline{9{,}1239242} \\ \log \sin b &= 9{,}9933515 \\ \log \sin c &= 9{,}9375306 \\ & \overline{9{,}9308821} = \log \sin b . \sin c, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad & 9{,}1930421 - 10 \\ & 4{,}5965212 - 5 \\ \text{oder} \quad & 9{,}5965212 = \log \cos \tfrac{1}{2} A, \end{aligned}$$

$$\tfrac{1}{2} A = 66^\circ\ 44'\ 18'', \qquad A = 133^\circ\ 28'\ 36''.$$

Wenn wir für dasselbe Beispiel die Formel für den Sinus des halben Winkels annehmen, so ist

$$\log \sin \tfrac{1}{2} A = \tfrac{1}{2} [\log \sin (s-b) + \log \sin (s-c) - \log \sin b - \log \sin c].$$

$$\begin{aligned} \log \sin (s-b) &= 9{,}8842540 \\ \log \sin (s-c) &= 9{,}9729858 \\ & \overline{9{,}8572398} \\ \log \sin b &= 9{,}9933515 \\ \log \sin c &= 9{,}9375306 \\ & \overline{9{,}9308821} = \log \sin b . \sin c, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad & 9{,}9263577 - 10 \\ & 4{,}9631789 - 5 \\ \text{oder} \quad & 9{,}9631789 = \log \sin \tfrac{1}{2} A, \end{aligned}$$

$$\tfrac{1}{2} A = 66^\circ\ 44'\ 18'', \qquad A = 133^\circ\ 28'\ 36''.$$

Also in beiden Fällen völlig gleich.

Auf diese Weise werden auf die Winkel B und C gefunden.

Beispiel 2. Es sei $a = 10^\circ$, $b = 70^\circ$, $c = 79^\circ$, und man verlangt die Winkel A, B, C.

Es ist $s = 79^\circ\ 30'$, $s-a = 69^\circ\ 70'$, $s-b = 9^\circ\ 30'$, $s-c = 30'$.

Suchen wir nun zuerst den Winkel A, so ist nach der entsprechenden Formel zu schließen, daß derselbe sehr klein werden müsse; daher haben wir die Formel für den Sinus des halben Winkels anzuwenden.

Also

$$\log \sin \tfrac{1}{2} A = \tfrac{1}{2} [\log \sin (s-b) + \log \sin (s-c) - \log b - \log c].$$

$$\begin{aligned} \log \sin (s-b) &= 9{,}2176092 - 10 \\ \log \sin (s-c) &= 7{,}9408419 - 10 \\ &\overline{17{,}1584511 - 20,} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log \sin b &= 9{,}9729858 \\ \log \sin c &= 9{,}9919466 \\ &\overline{19{,}9649324 - 20} = \log \sin b . \log \sin c, \\ \text{d. i. } & 0{,}1935187 - 3 \\ \text{oder } & 1{,}1935187 - 4 \\ 2) \quad & 0{,}5967594 - 2 \\ \text{oder } & 8{,}5957594 = \log \sin \tfrac{1}{2} A, \end{aligned}$$

$$\tfrac{1}{2} A = 2^\circ\ 15'\ 52{,}63'', \qquad A = 4^\circ\ 31'\ 45{,}26''.$$

Suchen wir diesen Winkel aus der Gleichung für den Cosinus des halben Winkels, so nimmt die Rechnung folgende Gestalt an:

$$\begin{aligned} \log \sin s &= 9{,}9926661 \\ \log \sin (s-a) &= 9{,}9715876 \\ &\overline{19{,}9642537,} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log \sin b &= 9{,}9729858 \\ \log \sin c &= 9{,}9919466 \\ &\overline{9{,}9649324} = \log \sin b . \sin c, \\ 2) \quad & 9{,}9993213 - 10 \\ & 4{,}9996607 - 5 \\ \text{oder } & 8{,}9996607 = \log \cos \tfrac{1}{2} A, \end{aligned}$$

$$\tfrac{1}{2} A = 2^\circ\ 15'\ 42{,}5'', \qquad A = 4^\circ\ 31'\ 25''.$$

Also gegen obiges Resultat eine Abweichung von 20,26″.

Anmerkung. Um in solchen Fällen sicher zu gehen, welche von den beiden Formeln man zur genauen Berechnung zu wählen hat, kann man zuerst beliebig die eine von beiden hierzu anwenden. Aus dem erhaltenen Resultate läßt sich dann leicht ersehen, welche von beiden zur genauen Berechnung am brauchbarsten ist; denn die erwähnte Abweichung kann höchstens bis zu den Minuten gehen.

Zweiter Fall. Gegeben die drei Winkel A, B, C, und gesucht die drei Seiten a, b, c.

Man betrachte wieder die allgemeine Formel

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b . \cos c}{\sin b . \sin c},$$

worunter ich natürlich auch die beiden andern verwandten Gleichungen nämlich die für cos B und cos C mit begreife.

Dann sei für das Supplementardreieck

$$\cos A' = \frac{\cos a' - \cos b' . \cos c'}{\sin b' . \sin c'},$$

wo das gegebene Dreieck A B C und das Supplementardreieck A' B' C' sein soll.

Nun ist nach (§ 284)

$$A' + a = 180^\circ \quad \text{oder} \quad A = 180^\circ - a,$$
$$a' + A = 180^\circ,\ b' + B = 180^\circ,\ c' + C = 180^\circ;$$

folglich

$$\cos A' = -\cos a, \qquad \cos a' = -\cos A,$$
$$\cos b' = -\cos B, \qquad \cos c' = -\cos C,$$
$$\sin b' = \sin B, \qquad \sin c' = \sin C.$$

Also folgt nach gehöriger Substitution, zugleich mit Verwechselung der Buchstaben,

$$\cos a = \frac{\cos A + \cos B . \cos C}{\sin B . \sin C},$$

$$\cos b = \frac{\cos B + \cos A . \cos C}{\sin A . \sin B},$$

$$\cos c = \frac{\cos C + \cos A . \cos B}{\sin A . \sin B}.$$

Daraus leitet man in ähnlicher Weise wie für den ersten Fall her, wenn $S = \frac{A + B + C}{2}$ gesetzt wird,

$$\text{M}'. \quad \sin \tfrac{1}{2} a = \sqrt{\frac{-\cos S . \cos (S-A)}{\sin B . \sin C}}$$

$$\sin \tfrac{1}{2} b = \sqrt{\frac{-\cos S . \cos (S-B)}{\sin A . \sin C}}$$

$$\sin \tfrac{1}{2} c = \sqrt{\frac{-\cos S . \cos (S-C)}{\sin A . \sin B}}$$

Ingleichen, wenn $S = \frac{A + B + C}{2}$ ist,

$$\text{N}'. \quad \cos \tfrac{1}{2} a = \sqrt{\frac{\cos (S-B) . \cos (S-C)}{\sin B . \sin C}}$$

$$\cos \tfrac{1}{2} b = \sqrt{\frac{\cos (S-A) . \cos (S-C)}{\sin A . \sin C}}$$

$$\cos \tfrac{1}{2} c = \sqrt{\frac{\cos (S-A) . \cos (S-B)}{\sin A . \sin B}}$$

Welche von diesen Formeln eine schärfere Genauigkeit der Rechnung gewährt, wird nach den bei dem ersten Falle gegebenen Regeln entschieden; d. h. wenn die zu bestimmenden Bogen a, b, c sehr klein ausfallen, so wende man die Formeln M' an, im Gegentheile aber die Formeln N'.

Beispiel 1. Es sei $A = 120°$, $B = 130°$, $C = 140°$; und es sollen die Bogen a, b, c gesucht werden.

Auflösung. Es ist $S = 195°$, $S-A = 75°$, $S-B = 65°$, $S-C\ 55°$. Bestimmt man die verlangten Werthe nach den Gleichungen M', so erhalten wir $S = 195°$, als einen Winkel im dritten Quadranten, dessen Cosinus negativ ist. Es ist also $\cos 195° = \cos(180° + 15°) = -\cos 15°$. Der negative Ausdruck unter dem Wurzelzeichen verwandelt sich daher in einen positiven. Ferner ist $\sin A = \sin 60°$, $\sin B = \sin 50°$ und $\sin C = \sin 40°$; demnach ist

$$\sin \tfrac{1}{2} a = \sqrt{\frac{\cos 15° \ . \ \cos 75°}{\sin 50° \ . \ \sin 40°}}, \text{ und}$$

$$\log \sin \tfrac{1}{2} a = \tfrac{1}{2} [\log \cos 15° + \log \cos 75° - \log \sin 50° - \log \sin 40°].$$

$$\begin{array}{lcl}
\log \cos 15° & = & 9{,}9849438 \\
\log \cos 75° & = & \underline{9{,}4129962} \\
 & & 9{,}3979400 \\
\log \sin 50° & = & 9{,}8842540 \\
\log \sin 40° & = & \underline{9{,}8080675} \\
 & & 9{,}6923215 = \log \sin 50° \ . \ \sin 40°. \\
2) & & 9{,}7056185 - 10 \\
 & & 4{,}8528093 - 5 \\
\text{oder} & & 9{,}8528093 = \log \sin \tfrac{1}{2} a.
\end{array}$$

$\tfrac{1}{2} a = 95° \ 26' \ 31{,}61''$, $a = 90° \ 53' \ 1{,}32''$.

Berechnung nach der Formel in N':

$$\begin{array}{lcl}
\log \cos (S-B) & = & 9{,}6259483 \\
\log \cos (S-C) & = & \underline{9{,}7585918} \\
 & & 9{,}3845401 \\
\log \sin B & = & 9{,}8842540 \\
\log \sin C & = & \underline{9{,}8080675} \\
 & & 9{,}6923215 = \log \sin B \ . \ \sin C. \\
2) & & 9{,}6922186 - 10 \\
 & & 4{,}8461093 - 5 \\
\text{oder} & & 9{,}8461093 = \log \cos \tfrac{1}{2} a.
\end{array}$$

$\tfrac{1}{2} a = 45° \ 25' \ 30{,}91''$, $a = 90° \ 51' \ 1{,}83''$.

Das erstere Ergebniß ist also gegen letzteres um $1' \ 59{,}49''$ zu groß.

Die beiden übrigen Seiten b und c wollen wir ebenfalls aus den Formeln in M' und N' berechnen, um zu sehen, wie die Ergebnisse von einander abweichen.

Bestimmung des Bogens b.

Es ist
$$\log\cos S = 9{,}9849438$$
$$\log\cos(S-B) = 9{,}6259483$$
$$9{,}6108921$$
$$\log\sin A.\sin C = 9{,}7455981$$
$$2)\ \ 9{,}8652940$$
$$9{,}9326470 = \log\sin\tfrac{1}{2}b.$$

$\frac{1}{2}b = 58^\circ\ 54'\ 29'',76,\quad b = 117^\circ\ 48'\ 59'',02.$

$$\log\cos(S-A) = 9{,}4129962$$
$$\log\cos(S-C) = 9{,}7585918$$
$$9{,}1715880$$
$$\log\sin A.\sin C = 9{,}7455981$$
$$2)\ \ 9{,}4259899$$
$$9{,}7129950 = \log\cos\tfrac{1}{2}b.$$

$\frac{1}{2}b = 58^\circ\ 54'\ 25'',08,\quad b = 117^\circ\ 48'\ 50'',16.$

Der Unterschied zwischen beiden Resultaten beträgt demnach 49,26, welcher als gering zu erachten ist.

Berechnung der Seite c.

$$\log\cos S = 9{,}9849438$$
$$\log\cos(S-C) = 9{,}7585918$$
$$9{,}7435356$$
$$\log\sin A.\sin B = 9{,}8217846$$
$$2)\ \ 9{,}9217510$$
$$9{,}9608755 = \log\sin\tfrac{1}{2}c.$$

$\frac{1}{2}c = 66^\circ\ 2'\ 35'',\quad c = 132^\circ\ 5'\ 10''.$

$$\log\cos(S-A) = 9{,}4129962$$
$$\log\cos(S-B) = 9{,}6259483$$
$$9{,}0389445$$
$$\log\sin A.\sin B = 9{,}8217896$$
$$2)\ \ 9{,}2171599$$
$$9{,}6085799 = \log\cos\tfrac{1}{2}c.$$

$\frac{1}{2}c = 66^\circ\ 2'\ 35'',\quad c = 132^\circ\ 5'\ 10''.$

Unterschied = 0.

Anmerkung. Obige Formeln M' können nie imaginär werden: denn wäre dies der Fall, so müßte cos S mit den Größen cos (S—A), cos (S—B), cos (S—C) einerlei Zeichen haben. Nun wird aber S oder die halbe Summe immer größer als 90° und kleiner als 260° sein, weil

die ganze Summe oder 2 S größer als 180° und kleiner als 540° sein muß; daher ist S immer ein Winkel im dritten Quadranten, dessen Cosinus negativ ist. Ferner können die Winkel S — A, S — B, S — C nie 90° übersteigen, daher ist ihr Cosinus immer positiv; folglich hat cos S mit den erwähnten Größen verschiedene Vorzeichen; und da überdies die Producte im Nenner d. h. sin B, sin C u. s. w. stets positiv sind, so muß das Zeichen unter der Wurzelgröße in das entgegengesetzte übergehen.

Bemerkung. Man kann auch noch Formeln für den Sinus und Cosinus des ganzen Winkels und für die Tangente des halben Winkels herleiten; sie machen sich aber bei den Berechnungen durch die hier angeführten ganz entbehrlich, deshalb habe ich sie auch nicht mit aufgestellt.

Dritter Fall. Gegeben seien zwei Seiten a und b mit dem eingeschlossenen Winkel C, und gesucht werden die beiden anderen Winkel A und B nebst der dritten Seite c.

Aus den gegebenen Stücken erhält man die dritte Seite c nach (§ 275) mittelst der Formel

$$\cos c = \cos a . \cos b + \sin a \sin b . \cos C,$$

indem man dort nur die Buchstaben gehörig zu verwechseln braucht.

Da jedoch diese Formel zur logarithmischen Rechnung nicht bequem ist, so bedient man sich bei der Auflösung am besten der Neper'schen Analogieen (§ 279, S. 209).

Durch diese Formeln ergeben sich aus dem gegebenen Stücken unmittelbar die Werthe $\frac{1}{2}(A + B)$ und $\frac{1}{2}(A - B)$, folglich nach A und B ohne alle Zweideutigkeit.

Da nun nebst der gegebenen Größe auch A und B bekannt sind, so könnte man die dritte Seite c unmittelbar aus einer der oben (§ 275) angeführten Formeln $\sin c = \sin a \sin C : \sin A$ finden. Dabei würde aber nach (S. 226) unentschieden bleiben, ob c größer oder kleiner als 90° zu nehmen sei. Um daher c mit Bestimmtheit zu erhalten bedient man sich zur Berechnung desselben einer der beiden Neper'schen Analogieen

$$\cot \tfrac{1}{2} c = \frac{\cos \frac{1}{2}(A - B)}{\cos \frac{1}{2}(A + B)} . \cot \tfrac{1}{2}(a + b)$$

$$\cot \tfrac{1}{2} c = \frac{\sin \frac{1}{2}(A - B)}{\sin \frac{1}{2}(A + B)} . \cot \tfrac{1}{2}(a - b),$$

Um diese Ausdrücke aus den obigen (§ 275 ꝛc.) zu erhalten, darf man sich nur erinnern, daß $\frac{\tang \frac{1}{2}(a + b)}{\tang \frac{1}{2} c} = \frac{\cot \frac{1}{2} c}{\cot \frac{1}{2}(a + b)}$ ist.

Beispiel. Es sei a = 80°, b = 70°, C = 120°, so ist $\frac{1}{2}(a + b) = \frac{1}{2}(80° + 70°; \frac{1}{2}(b - c) = \frac{1}{2}(80° - 70°) = 5°$; demnach ist nach Formel (§ 279)

$$\tang \tfrac{1}{2}(A + B) = \frac{\cos 5°}{\cos 75°} . \cot 60°.$$

Also $\log \tang \frac{1}{2}(A + B) = \log \cos 5° + \log \cot 60° - \log \cos 75°$

$$\begin{array}{lr} \log\cos 5^\circ = & 9{,}9983442 \\ \log\cot 60^\circ = & 9{,}7614394 \\ \hline & 9{,}7597836 \\ \log\cos 75^\circ = & 9{,}4129962 \\ \hline & 10{,}3467874 = \log\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(A+B). \end{array}$$

Man findet $\tfrac{1}{2}(A+B) = 65^\circ\ 46'\ 2{,}01''$.

Ferner nach der andern Formel $\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(A-B) = \frac{\sin 5^\circ}{\sin 75^\circ}\cot 60^\circ$ ist

$$\log\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(A-B) = \log\sin 5^\circ + \log\cot 60^\circ - \log\sin 75^\circ$$

$$\begin{array}{lr} \log\sin 5^\circ = & 8{,}9402960 \\ \log\cot 60^\circ = & 9{,}7014394 \\ \hline & 8{,}7017354 \\ \log\sin 75^\circ = & 9{,}9849438 \\ \hline & 8{,}7167916 = \log\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(A-B). \end{array}$$

Man findet $\tfrac{1}{2}(A-B) = 2^\circ\ 58'\ 55{,}55''$.

Addirt man das eine Mal beide erhaltenen Werthe, so ergiebt sich

$$A = 68^\circ\ 44'\ 57{,}56''$$

und subtrahirt man den kleineren und den größern, so folgt

$$B = 62^\circ\ 47'\ 6{,}46''. \quad (\S\ 245).$$

Nun suche man die Seite c etwa nach der zweiten der oben angezeigten Gleichungen, so ist

$$\log\cot\tfrac{1}{2}c = \log\sin 2^\circ 58' 55'', 55 + \log\cot 5^\circ - \log\sin 65^\circ 46' 2{,}01''$$

$$\begin{array}{lr} \log\sin 2^\circ 58' 55{,}55'' = & 8{,}7162032 \\ \log\cot 5^\circ = & 11{,}0580482 \\ \hline & 9{,}7742514 \\ \log\sin 65^\circ 46' 2{,}01'' = & 9{,}9599403 \\ \hline & 9{,}8143111 = \log\cot\tfrac{1}{2}c \end{array}$$

$$\tfrac{1}{2}c = 56^\circ 53' 30{,}53''; \quad c = 113^\circ 47' 1{,}06''.$$

Anmerkung. Um zu sehen, ob die Rechnung richtig ist, kann man als Controle die eine oder die andere der gesuchten Größen A, B und c aus einer der Gleichungen $\sin c = \frac{\sin a \sin C}{\sin A} = \frac{\sin b \sin C}{\sin B}$ bestimmen.

Vierter Fall. Gegeben seien zwei Winkel A und B mit ihrer Zwischenseite c, und gesucht werden der dritte Winkel C nebst den beiden anderen Seiten a und b.

Auflösung. Man suche die Seiten a und b mittelst der Neper'schen Analogieen

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(a+b) = \frac{\cos\tfrac{1}{2}(A-B)}{\cos\tfrac{1}{2}(A+B)}\,.\,\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}c,$$

oder

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(a-b) = \frac{\sin\tfrac{1}{2}(A-B)}{\sin\tfrac{1}{2}(A+B)}\,.\,\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}c.$$

Sonach erhält man in ähnlicher Weise, wie im vorhergehenden Falle, die Seiten a und b.

Alsdann ergiebt sich C ohne alle Zweideutigkeit ebenfalls nach den Neper'schen Analogieen aus einer der Formeln

$$\text{tang}\ \tfrac{1}{2}C = \frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}\ .\ \cot\tfrac{1}{2}(A+B),$$

oder

$$\text{tang}\ \tfrac{1}{2}C = \frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)}\ .\ \cot\tfrac{1}{2}(A-B).$$

Fünfter Fall. Gegeben seien zwei Seiten a und b mit dem Gegenwinkel A; gesucht werden der andere Gegenwinkel B, die dritte Seite c und ihr Gegenwinkel C.

Auflösung. Den Gegenwinkel B berechnet man aus der Gleichung

$$\sin B = \frac{\sin b\ .\ \sin A}{\sin a}\ .$$

Da man jedoch nach dem hier gefundenen Sinus von B nicht zu entscheiden vermag, ob der Winkel B, wofern er kein rechter wird, über oder unter 90° ist, so untersuche man zuerst, ob die gegebene Seite b größer oder kleiner als a ist. Da nun nach der größeren Seite der größere Winkel gegenüber liegt, so muß auch der Winkel B im ersteren Falle größer, im anderen kleiner als A sein.

Man untersuche daher, welcher von den zwei für B gefundenen Winkeln dieser Forderung genügt. Leistet nur einer von ihnen Genüge, so ist sowohl dieser Winkel B, als auch das Dreieck selbst bestimmt; genügen aber beide Werthe, so giebt es zwei verschiedene Dreiecke, welche die gegebenen Größen enthalten.

Mit dem gefundenen Winkel B berechnet man sofort die dritte Seite c aus den Neper'schen Analogieen:

$$\cot\tfrac{1}{2}c = \frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)}\ .\ \cot\tfrac{1}{2}(a+b)$$

$$= \frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}(A+B)}\ .\ \cot\tfrac{1}{2}(a-b)$$

und

$$\text{tang}\ \tfrac{1}{2}C = \frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}\ .\ \cot\tfrac{1}{2}(A+B)$$

$$= \frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)}\ .\ \cot\tfrac{1}{2}(A-B).$$

Beispiel 1. Es sei $A = 70°$, $a = 40°$, $b = 30°$, so ist wegen $\sin B = \frac{\sin b\ .\ \sin A}{\sin a}$, $\sin B = \frac{\sin 30°\ .\ \sin 70°}{\sin 40°}$.

Also

$$\begin{aligned} \log\ \sin 30° &= 9{,}6989700 \\ \log\ \sin 70° &= 9{,}9729858 \\ &\overline{\ 9{,}6719558} \\ \log\ \sin 40° &= 9{,}8080675 \\ &\overline{\ 9{,}8638883} = \log\ \sin B. \end{aligned}$$

Diesem Logarithmen entspricht ein Winkel von $46^\circ\ 57'\ 58{,}28'' = B$, dessen Supplement $= 180^\circ - 46^\circ\ 57'\ 58{,}28'' = 133^\circ\ 2'\ 1{,}72''$. Es ist demnach sowohl

$$B = 46^\circ\ 57'\ 58{,}28'', \text{ als auch } B = 133^\circ\ 2'\ 7{,}72''.$$

Wollte man nun für B den zweiten Werth oder den Supplementswinkel, $133^\circ\ 2'\ 1{,}72''$, so würde in diesem Falle gegen obigen Lehrsatz: daß der größeren Seite auch ein größerer Winkel gegenüber liegen muß, ein Widerspruch stattfinden. Denn da a größer als b ist, so muß auch A größer als B sein; also leistet von den beiden gefundenen Werthen nur einer, nämlich der kleinere, d. h. $B = 46^\circ\ 57'\ 58{,}28''$, der Forderung Genüge, und das Dreieck ist vollkommen bestimmt.

Beispiel 2. Es sei $A = 170^\circ$, $a = 50^\circ$, $b = 40^\circ$; so ist wegen $\sin 170^\circ = \sin(180^\circ - 170^\circ) = \sin 10^\circ$,

$$\sin B = \sin 10^\circ \, . \, \sin 40^\circ : \sin 50^\circ.$$

$$\begin{array}{lrl} \log \sin 10^\circ & = & 9{,}5340517 \\ \log \sin 40^\circ & = & \underline{9{,}8080675} \\ & & 9{,}3421192 \\ \log \sin 50^\circ & = & \underline{9{,}8842540} \\ & & 9{,}4578652 = \log \sin B. \end{array}$$

$$\tfrac{1}{2} B = 16^\circ\ 14'' \text{ und } B = 163^\circ\ 46''.$$

Da nun b kleiner als a ist, so muß auch B kleiner als A sein; es sind aber beide Werthe von B kleiner als A, daher entsprechen dieselben, wie oben in der ebenen Trigonometrie, zwei verschiedenen Dreiecken, welche die Bedingung der Aufgabe erfüllen.

In beiden Dreiecken sind also nur die Winkel B und C und die Seiten c verschieden, so wie es oben bei dem ebenen Dreiecke der Fall ist, d. h. für den einen Winkel B giebt es auch in demselben Dreieck einen entsprechenden Winkel C und eine bestimmte Seite c.

Um auch hier eine Vergleichung wie dort zu erhalten, wollen wir die übrigen Stücke beider Dreiecke ausführlich berechnen.

In dem einen Dreieck, wo $A = 170^\circ$, $a = 50^\circ$, $b = 40^\circ$ ist, soll für $B = 16^\circ\ 14'$ der dritte Winkel C und die Gegenseite c gefunden werden.

Nun ist $\tfrac{1}{2}(a+b) = 45^\circ$, $\tfrac{1}{2}(a-b) = 5^\circ$; $\tfrac{1}{2}(A+B) = 93^\circ\ 7'$; $\tfrac{1}{2}(A-B) = 76^\circ\ 53'$; also nach obiger Formel für die Tangente des halben Winkels

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} C = \frac{\sin \frac{1}{2}(a-b)}{\sin \frac{1}{2}(a+b)} \, . \cos \tfrac{1}{2}(A-B) = \frac{\sin 5^\circ}{\sin 45^\circ} \, . \cos 76^\circ\ 53'.$$

$$\begin{array}{lrl} \log \sin 5^\circ & = & 8{,}9402960 \\ \log \cot 76^\circ\ 53' & = & \underline{9{,}3673819} \\ & & 8{,}3076779 \\ \log \sin 45^\circ & = & \underline{9{,}8494850} \\ & & 8{,}4581929 = \log \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} C. \end{array}$$

$$\tfrac{1}{2} C = 1^\circ\ 38'\ 42{,}4'', \quad C = 3^\circ\ 17'\ 24{,}8''.$$

Ferner ist

$$\cot \tfrac{1}{2} c = \frac{\sin \frac{1}{2}(A-B)}{\sin \frac{1}{2}(A+B)} \cdot \cot \tfrac{1}{2}(a-b) = \frac{\sin 76^\circ 53'}{\sin 93^\circ 7'} \cdot \cot 5^\circ.$$

$$\begin{aligned} \log \sin 76^\circ 53' &= 9{,}9885188 \\ \log \cot 5^\circ &= 11{,}0580482 \\ &\overline{11{,}0465670} \\ \log \sin 93^\circ 7' &= 9{,}9993572 \\ &\overline{10{,}0472098} = \log \cot \tfrac{1}{2} c. \end{aligned}$$

$$\tfrac{1}{2} c = 41^\circ 53' 31{,}06'', \qquad c = 83^\circ 47' 2{,}12''.$$

Im anderen Dreiecke, wo wieder $A = 170^\circ$, $a = 50^\circ$, $b = 40^\circ$ ist, soll für $B = 163^\circ 46'$ der Winkel C und die Seite c gefunden werden.

Hier ist $\frac{1}{2}(A+B) = 166^\circ 53'$, $\frac{1}{2}(A-B) = 3^\circ 7'$; also

$$\tan \tfrac{1}{2} C = \frac{\sin 5^\circ}{\sin 45^\circ} \cdot \cot 3^\circ 7'; \quad \cot \tfrac{1}{2} c = \frac{\sin 3^\circ 7'}{\sin 166^\circ 53'} \cdot \cot 5^\circ.$$

$$\begin{aligned} \log \sin 5^\circ &= 8{,}9402960 \\ \log \cot 3^\circ 7' &= 11{,}2640036 \\ &\overline{11{,}2042996} \\ \log \sin 45^\circ &= 9{,}8494850 \\ &\overline{11{,}3548146} = \log \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} C. \end{aligned}$$

$$\tfrac{1}{2} C = 87^\circ 28' 14'', \qquad C = 174^\circ 56' 28''.$$

$$\begin{aligned} \log \sin 3^\circ 7' &= 8{,}7353535 \\ \log \cot 5^\circ &= 11{,}0580482 \\ &\overline{9{,}7934017} \\ \log \sin 166^\circ 53' &= 9{,}3553680 \\ &\overline{10{,}4280337} = \log \cot \tfrac{1}{2} c. \end{aligned}$$

$$\tfrac{1}{2} c = 20^\circ 2' 17{,}55'', \qquad c = 40^\circ 4' 35{,}1''.$$

Es ist also

für das eine Dreieck:	für das andere Dreieck:
$A = 170^\circ$	$A = 170^\circ$
$B = 16^\circ 14'$	$B = 163^\circ 46'$
$C = 3^\circ 17' 24{,}8''$	$C = 174^\circ 56' 28''$
$a = 50^\circ$	$a = 50^\circ$
$b = 40^\circ$	$b = 40^\circ$
$c = 83^\circ 47' 2{,}12''$	$c = 40^\circ 4' 35{,}1''$.

Sechster Fall. Gegeben seien zwei Winkel A und B mit der Gegenseite a; gesucht werden: die Gegenseite b, der dritte Winkel C mit seiner Gegenseite c.

Auflösung. Die Gegenseite b findet man aus der Gleichung

$$\sin b = \frac{\sin B \cdot \sin a}{\sin A}.$$

Auch hier prüfe man zuerst, da sin b ebenfalls zwei verschiedenen Bogen angehört, ob B größer oder kleiner als A ist, und folgere daraus, daß nach obigem auch b im ersteren Falle größer, im anderen kleiner als a werden müsse. Leistet nur einer der beiden gefundenen Werthe von b der Forderung Genüge, so ist das Dreieck bestimmt; genügen derselben aber beide Werthe, so nimmt das Dreieck zwei verschiedene Gestalten an, wie das Beispiel des fünften Falles zeigt. Ist dann b gefunden, so berechne man den dritten Winkel C und seine Gegenseite, wie im fünften Falle, nach den Neper'schen Analogieen.

§ 290. Es bleibt nun noch darzuthun übrig, unter welchen Bedingungen in den beiden letzten Fällen das sphärische Dreieck bestimmt ist, oder unbestimmt bleibt.

Die Untersuchungen hierüber, die ich nicht weiter auseinander setzen will, gewähren folgende Kennzeichen, welche entscheiden, ob die gesuchten Stücke eines sphärischen Dreiecks nur eine oder zwei Auflösungen gestatten.

Das Dreieck ist nämlich **unbestimmt** oder es ergiebt sich eine **Zweideutigkeit**, wenn folgende Bedingungen der Aufgabe stattfinden:

1) $A < 90^\circ,\ c < 90^\circ,\ a < c.$
2) $A < 90^\circ,\ c > 90^\circ,\ a + c < 180^\circ.$
3) $A > 90^\circ,\ c < 90^\circ,\ a + c < 180^\circ.$
4) $A > 90^\circ,\ c > 90^\circ,\ a > c.$

Anmerkung. Es ist wohl kaum nöthig, zu erwähnen, daß man statt c auch b setzen kann, weil b und c anliegende Seiten des Winkels A sind.

Nachträgliche Bemerkungen über die rechtwinkeligen sphärischen Dreiecke.

§ 291. Außer den obigen Formeln, die zur Berechnung der gesuchten Stücke des rechtwinkeligen sphärischen Dreiecks gegeben sind, lassen sich noch mehrere aus den folgenden bisher aufgestellten Gleichungen für das schiefwinkelige Dreieck ableiten, wenn man in denselben nach Umständen $A = 90^\circ$ setzt, oder in gewissen Fällen die Buchstaben gehörig verwechselt. Es sind im Ganzen genommen folgende:

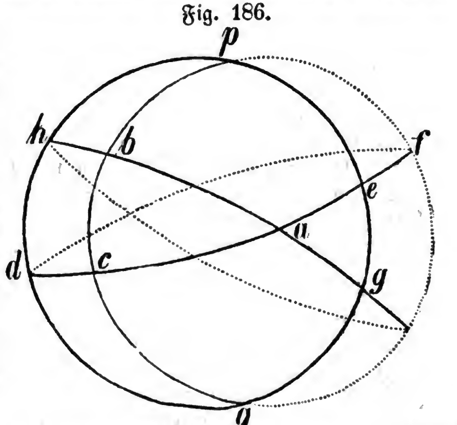
$$\begin{aligned}
\cos a &= \cos b \,.\, \cos c,\\
\sin b &= \sin a \,.\, \sin B,\\
\sin c &= \sin a \,.\, \sin C,\\
\cos B &= \sin C \,.\, \cos b,\\
\cos C &= \sin B \,.\, \cos c,\\
\cos a &= \cot B \,.\, \cot C,\\
\sin b &= \cot C \,.\, \operatorname{tang} c,\\
\sin c &= \cot B \,.\, \operatorname{tang} b,\\
\cos B &= \cot a \,.\, \operatorname{tang} c,\\
\cos C &= \cot a \,.\, \operatorname{tang} b.
\end{aligned}$$

Beachtet man noch, daß z. B. sin a = cos (90° — a ist, u. s. w., so gehen obige Gleichungen nach derselben Ordnung in folgende über:

$$\begin{aligned}
\cos a &= \sin(90^\circ - b)\sin(90^\circ - c),\\
\cos(90^\circ - b) &= \sin a \,.\, \sin B,\\
\cos(90^\circ - c) &= \sin a \,.\, \sin C,\\
\cos B &= \sin C \,.\, \sin(90^\circ - b),\\
\cos C &= \sin B \,.\, \sin(90^\circ - c),\\
\sin(90^\circ - a) &= \cot B \,.\, \cot C,\\
\cos(90^\circ - b) &= \cot C \,.\, \cot(90^\circ - c),\\
\cos(90^\circ - c) &= \cot B \,.\, \cot(90^\circ - b),\\
\cos B &= \cot a \,.\, \cot(90^\circ - c),\\
\cos C &= \cot a \,.\, \cot(90^\circ - b).
\end{aligned}$$

Bestimmung des Flächeninhalts der sphärischen Dreiecke.

Fig. 186.



§ 292. Um den Flächeninhalt eines sphärischen Dreiecks zu finden, stelle man folgende Betrachtungen auf. Es sei (Fig. 186) a b c ein sphärisches Dreieck und A, B, C seine Winkel, man verlängere dessen Seiten a b, a c, b c, welche Bogen größter Kreise sind, bis sie zu ganzen Kreisen a b h g, a c d f, b c q f werden. — Ein Streifen auf der Oberfläche einer Kugel, welcher durch zwei größte Kreise, die sich unter einem Winkel A schneiden, gebildet wird, ist derjenige Theil der Kugeloberfläche, welchen man erhält, wenn man 360° durch A dividirt, also ähnlich der Berechnung eines Kreisausschnitts, wenn der von beiden Halbmessern gebildete Winkel gegeben ist (vergleiche oben die Kreisberechnung). Nun ist aber die Oberfläche der Kugel, wenn r den Radius bedeutet, $= 4\,r^2\,\pi$, also ist 1) der Flächeninhalt des Streifens, durch den sphärischen Winkel A mit ausgedrückt, gleich $4\,r^2\,\pi . \frac{A}{360} = \frac{1}{90}\,A\,r^2\,\pi$.

Ferner, wenn sich zwei größte Kreise p c p, p d q unter einem beliebigen Winkel p schneiden, und man zieht einen dritten größten Kreis c f, so entstehen die sphärischen Dreiecke p d c, d c q, p e f, e f q. Es ist aber 2) p d + d q = 180°, p d + p e = 180°, also d q = p e; und eben so c q = p f. Daher sind die Dreiecke d c q, p e f, und aus

demselben Grunde auch die Dreiecke p d c und e q f einander gleich; man hat daher wegen (1) und (2)

$$3)\quad pdc + pef = \tfrac{1}{90}\, p\, r^2 \pi.$$

Nun besteht aber die durch den Kreis p d q e begrenzte Halbkugel aus den sphärischen Dreiecken d a h, d a g, g a e und h a e.

Nun ist nach (3) $dah + eag = \tfrac{1}{90} A r^2 \pi$

$$gbq + hbp = \tfrac{1}{90} B r^2 \pi$$

$$pce + dcq = \tfrac{1}{90} C r^2 \pi.$$

Also die Summe dieser drei Werthe rechter Hand

$$= \tfrac{1}{90} r^2 \pi (A + B + C).$$

Das Dreieck a b c ist aber in den angeführten Dreiecken zweimal enthalten: das eine Mal in dem Dreieck g b q, das andere Mal in p c e, der letztere Ausdruck übertrifft demnach die Oberfläche $2 r^2 \pi$ der Halbkugel um 2 a b c.

Folglich ist

$$2abc + 2r^2\pi = \tfrac{1}{90} r^2 \pi (A + B + C)$$

also $$2abc = \tfrac{1}{90} r^2 \pi (A + B + C) - 2 r^2 \pi$$

und $$abc = \tfrac{1}{180} r^2 \pi (A + B + C) - r^2 \pi$$

$$= \tfrac{1}{180} [r^2 \pi (A + B + C) - 180\, r^2 \pi]$$

und wegen der gleichen Factoren $r^2 \pi$, folgt endlich der Flächeninhalt des sphärischen Dreiecks

$$\text{I.}\quad abc = \tfrac{1}{180} r^2 \pi (A + B + C - 180^\circ).$$

§ 293. **Erklärung.** Den Ueberschuß der drei Winkel eines sphärischen Dreiecks über 180° nennt man seinen **sphärischen Exceß.** Dieser ist $= A + B + C - 180^\circ$.

Bezeichnet man den Flächeninhalt des sphärischen Dreiecks mit F, den sphärischen Exceß mit E, so ist nach der Formel (I.)

$$\text{II.}\quad F = \tfrac{1}{180} E r^2 \pi.$$

Diese Formel (so wie auch I.) lehrt, aus den Winkeln eines sphärischen Dreiecks oder aus dem sphärischen Exceß nebst dem Halbmesser der Kugel seinen Flächeninhalt finden.

Beispiel 1. Es sei $A = 80^\circ$, $B = 120^\circ$, $C = 130^\circ$, $r = 1$, so ist $E = 150^\circ$, also $F = \tfrac{15}{18}.\pi = \tfrac{5}{6}.3{,}14 = 2{,}616\ldots$

Beispiel 2. Es sei
$$A = 49^\circ\ 48'\ 12''$$
$$B = 96^\circ\ 13'\ 15''$$
$$C = 111^\circ\ 14'\ 49''$$

$$257^\circ\ 16'\ 16'' = A + B + C$$

davon abgezogen 180°

Ueberschuß $= 77^\circ\ 16'\ 16''$

Nun ist $77^\circ\ 16'\ 16'' = \tfrac{69788}{900}$ Grad,

also $F = \tfrac{69788}{900} . \tfrac{1}{180} . 3{,}14$ für $r = 1$,

$F = 1{,}3534\ldots$ in Quadratmaß.

Anmerkung. Für die Bestimmung des Flächeninhaltes eines sphärischen Dreiecks aus seinen drei Seiten, aus zwei Seiten und einem Zwischenwinkel u. s. w. lassen sich ebenfalls Formeln aufstellen; da aber die Herleitung derselben etwas weitläuftig ist, so will ich sie hier übergehen.

Achter Abschnitt.

Anwendung der sphärischen Trigonometrie auf die Astronomie.

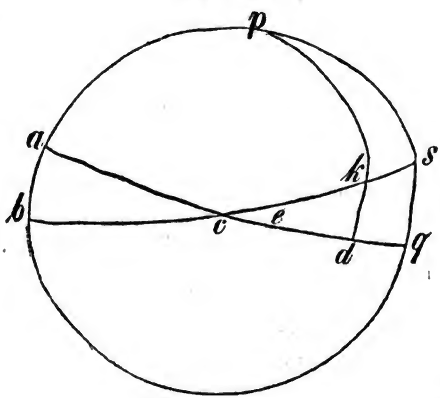
Die vielfachste Anwendung der sphärischen Trigonometrie erstreckt sich vornehmlich auf die Astronomie mit Inbegriff der mathematischen Geographie, Nautik und Gnomonik; und es läßt sich eigentlich jede Aufgabe der sphärischen Astronomie auf ein Problem der sphärischen Trigonometrie zurückführen. Damit der große Nutzen derselben eingesehen werde, will ich die Auflösung mehrerer der interessantesten Aufgaben über diese Wissenschaften auseinander setzen.

Um solche Aufgaben gehörig zu verstehen, wird nothwendig eine genaue Kenntniß der Eintheilung der Himmelskugel in gewisse Punkte, Linien und Kreise zur Bestimmung der Lage der Weltkörper, vorausgesetzt; der Kürze wegen übergehe ich aber eine einleitende Erläuterung derselben, und verweise deshalb auf meine populäre Astronomie.

§ 294. Aufgaben.

1) Aus der geraden Aufsteigung der Sonne und der Schiefe der Ecliptik ihre Abweichung (Declination) zu finden.

Fig. 187.



Auflösung. Es sei (Fig. 187) a q der Aequator, b s die Ecliptik und c der Punkt, wo sich diese beiden Kreise durchschneiden, so ist s e q = a c b die Schiefe der Ecliptik; ferner sei c der Frühlings-Nachtgleichenpunkt. Dann wollen wir annehmen, daß die scheinbare jährliche Bewegung der Sonne von c nach s und so fort um die Himmelskugel herumgehe.

Ist nun die Sonne in k, so lege man vom Pol p durch k den Bogen p d des Abweichungskreises, d. h. einen Bogen p d, der auf dem Aequator a q senkrecht steht, so ist e d die gerade Aufsteigung und d k die Abweichung der Sonne.

Bezeichnen wir die Schiefe der Ecliptik mit e, die gerade Aufsteigung mit a, und die Abweichung mit d, so soll in dem rechtwinkeligen Dreieck c d k, wo der rechte Winkel bei d ist, aus der einen Kathete c d und dem anliegenden Winkel k c d die Gegenseite d k gefunden werden. Hierzu dient obige Formel $\sin b = \cot C \,.\, \tan c$ (§ 228), in welcher für die hier angenommene Bezeichnung $b = a$, $c = d$ und $C = e$, also $\sin a = \cot e \,.\, \tan d$ ist, oder wegen $\cot e = \frac{1}{\tan e}$,

$$\tan d = \sin a \,.\, \tan e.$$

Es sei $e = 23^\circ\, 28'$, welches ungefähr der Werth der Schiefe der Ecliptik ist, $a = 340^\circ$, also

$$\begin{aligned} \tan d &= \sin 340^\circ \,.\, \tan 23^\circ\, 28' \\ &= -\sin 20^\circ \tan 23^\circ\, 28'. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log \sin 20^\circ &= 9{,}5340517 \\ \log \tan 23^\circ\, 28' &= 9{,}6379563 \\ \hline & \; 9{,}1720080 = \log \tan d. \end{aligned}$$

Man findet $d = 8^\circ\, 27'\, 7{,}5''$. Da aber die Abweichung südlich ist, so muß d negativ genommen werden, also $d = -8^\circ\, 27'\, 7{,}5''$.

Für $a = 90^\circ$ ist $\sin a = 1$, folglich $d = e$, also der Schiefe der Ecliptik selbst gleich.

2) Aus der Länge der Sonne und der Schiefe der Ecliptik ihre Abweichung zu finden.

Auflösung. Es sei die Sonne in k, so ist c k ihre Länge (dieselbe Figur), und wie vorher d k ihre Abweichung.

Nun soll in dem rechtwinkeligen Dreieck c d k aus der Hypotenuse c k, und dem anliegenden Winkel k c d die Gegenseite d k gesucht werden; die hierzu anzuwendende Formel ist $\sin c = \sin a \sin C$.

Bezeichnen wir die Länge mit l, so ist, wenn d und e ihre frühere Bedeutung behalten,

$$\sin d = \sin l \,.\, \sin e.$$

Man fragt nach der Abweichung der Sonne, wenn sie im Zeichen der Wage steht und in derselben $16^\circ\, 30'$ zurückgelegt hat.

Da die Wage das siebente Zeichen ist, und jedes Zeichen 30° zählt, so hat die Sonne vom Frühlings-Nachtgleichenpunkte bis dahin

$$6 . 30^\circ + 16^\circ 30' = 196^\circ 30'$$

durchlaufen; daher ist

$$\sin d = \sin 196^\circ 30' . \sin 23^\circ 28'.$$

Wegen $160^\circ 30' = 180^\circ + 16^\circ 30'$ ist $\sin 196^\circ 30' = - \sin 16^\circ 30'$.

Nach gehöriger Ausführung findet man $d = - 6^\circ 29' 38''$, die Abweichung ist also südlich.

3) Wenn die Sonne eine südliche Abweichung $= 17^\circ 20'$ hat, welches ist ihre gerade Aufsteigung; in welchem Zeichen steht sie, und wie weit ist sie in demselben vorgerückt?

Auflösung. Nach der Formel in Aufgabe 1 ist

$\sin a = \text{tang } d : \text{tang } e$, also $\sin a = \text{tang } 17^\circ 20' : \text{tang } 23^\circ 28'$.

$$\begin{aligned} \log \text{tang } 17^\circ 20' &= 9{,}4942988 \\ \log \text{tang } 23^\circ 28' &= \underline{9{,}6376106} \\ & 9{,}8566882 = \log \sin a, \end{aligned}$$

also $a = 45^\circ 57'$.

Allgemeine Bemerkungen.

Dieser Fall verdient eine ernstere Betrachtung. Wenn nämlich aus der gegebenen Länge oder geraden Aufsteigung der Sonne ihre Abweichung zu suchen ist, so läßt sich dieselbe aus dem Grunde mit Bestimmtheit finden, weil die Länge und gerade Aufsteigung vom Frühlings-Nachtgleichenpunkte von 0° bis zu 360° herumgezählt werden. Wenn aber aus der gegebenen Abweichung der Sonne ihre Länge und gerade Aufsteigung gefunden werden soll, so bleibt ihre gerade Aufsteigung oder Länge in derselben Halbkugel unbestimmt, wenn nicht die Jahreszeit, in welche diese Abweichung fällt, mit bemerkt ist.

Denn da die Abweichung von der Frühlingsnachtgleiche bis zur Sommer-Sonnenwende zunimmt, wo sie ihren größten Werth gleich der Schiefe der Ecliptik erreicht, und von da bis zur Herbstnachtgleiche wieder abnimmt, so kommen bei der Abnahme, also im Sommer, dieselben Werthe der Abweichung vor, wie im Frühling bei der Zunahme derselben, ohne daß die Abweichung, da die Sonne während dieses Halbjahres immer in derselben Halbkugel des Himmels — in der nördlichen — sich befindet, ihr positives Vorzeichen ändert.

Von der Herbstnachtgleiche schreitet die Sonne nach der südlichen Halbkugel, wo ihre Abweichung in die der früheren entgegengesetzte übergeht, also negativ wird, nimmt dieselbe immer bis zur Winter-Sonnenwende zu, wo ihr Werth am größten und zwar wiederum der Schiefe der Ecliptik gleich aber entgegengesetzt ist; dann nimmt sie wieder ab bis zum Frühlingsnachtgleichenpunkt wo sie = 0° ist. — Es findet demnach in der südlichen Halbkugel eine gleiche Zu- und Abnahme ihrer Declination, wie in der nördlichen, aber auf entgegengesetzte Art statt.

Wenn man nun z. B. aus der gegebenen nördlichen Declination der Sonne nebst der Schiefe der Ecliptik die verlangte gerade Auf-

steigung a gefunden hat, welche zunächst die Tafeln kleiner als 90° geben, so kann diese sowohl der Bogen vom Frühlingsnachtgleichenpunkte an nach der Ordnung der Zeichen, als auch ein gleichgroßer Bogen vom Herbstnachtgleichenpunkte an gegen die Ordnung der Zeichen sein. Die beiden Werthe sind demnach a und 180° — a, also der letztere das Supplement des ersteren, weil sin a zwei Winkeln angehört.

Es bleibt demnach unentschieden, welcher von den beiden Werthen zu nehmen sei.

Ist die Abweichung südlich, also negativ, so verwandelt sich unsere Formel

$$\sin a = \frac{\operatorname{tg} d}{\operatorname{tg} e} \text{ in } \sin a = -\frac{\operatorname{tg} d}{\operatorname{tg} e},$$

wo sin a negativ ist. Denn es ist tang (— d) = — tang d (vgl. § 253, S. 165, Zusatz).

Nun gehört aber der negative Sinus sowohl einem Winkel im dritten als auch im vierten Quadranten; daher finden auch in der südlichen Halbkugel zwei verschiedene Werthe der geraden Aufsteigung statt, welche für denselben absoluten Werth der Abweichung sind

$$180° + a \text{ und } 360° - a.$$

Denn es ist sin (180° + a) = — sin a, und auch sin (360° — a) = — sin a, der erstere Werth ist sonach der Bogen vom Herbstnachtgleichenpunkte nach der Ordnung der Zeichen, und der letztere, ein gleich großer Bogen, vom Frühlingsnachtgleichenpunkte gegen die Ordnung der Zeichen.

Wenn nun in unserer Aufgabe nebst der gegebenen südlichen Abweichung mit bemerkt wird, daß die Sonne z. B. sich zwischen der Winter-Sonnenwende und der Frühlingsnachtgleiche befindet, so ist ihre gerade Aufsteigung = 360° — 45° 57′ = 314° 3′.

Nun suche man die Länge aus der Formel sin l = sin d : sin e, also

$$\begin{array}{rl} \log \sin 17° 20' = & 9{,}4741146 \\ \log \sin 23° 28' = & \underline{9{,}6001181} \\ & 9{,}8739965 = \log \sin l. \end{array}$$

$$l = 48° 25' 53{,}5''.$$

Da aber der Sinus negativ ist und, wie oben, einem Winkel im vierten Quadranten angehört, so ist die wahre Länge

$$= 360° - 48° 25' 53{,}5'' = 311° 34' 6{,}5''.$$

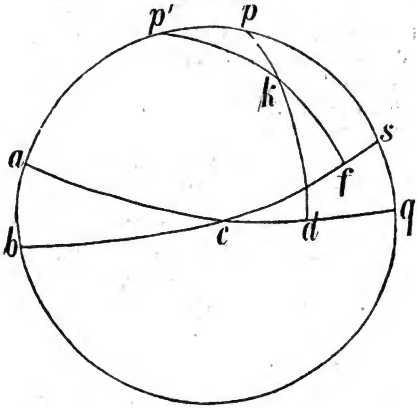
Die Sonne steht demnach im Zeichen des Wassermanns und hat in demselben 1° 34′ 6,5″ zurückgelegt.

Als Controle der Rechnung kann man etwa die oben (S. 228) angezeigte Formel cos a = cos b . cos c, welche nach den hier eingeführten Bezeichnungen cos l = cos a . cos d ist, anwenden, indem man die Länge aus der gegebenen Abweichung und erhaltenen Rectascension berechnet.

Auch kann man obige Formel cos C = cot a . tg b, die hier cot l = cos e : tang a, oder tang l = tang a : cos e ist, hiezu in Anwendung bringen.

4) Aus der gegebenen Rectascension und Declination eines Sterns nebst der Schiefe der Ecliptik seine Länge und Breite zu finden.

Fig. 188.



Auflösung. Es sei (Fig. 188) a q der Aequator, b s die Ecliptik, c der Frühlings-Nachtgleichenpunkt, p der Pol des Aequators und hier der Nordpol, p' der Pol der Ecliptik und k sei der Stern. Man ziehe nun durch den Stern den Bogen p d des Abweichungskreises und den Bogen p' f des Breitenkreises, den ersteren bis auf den Aequator, und den letzteren bis auf die Ecliptik, so ist c d die Rectascension, d k die Declination, c f die Länge und f k die Breite des Sterns. Der sphärische Winkel am Stern, den der Declinationskreis mit dem Breitenkreise bildet, nämlich p' k p, heißt der Positionswinkel.

Ist die Rectascension = a, Declination = d, Länge = l, Breite = b, der Positionswinkel = v, die Schiefe der Ecliptik = e, so hat man in dem schiefwinkeligen Dreieck p k p', da p' f, p d, p' s, und p q Quadranten sind, und b p s q den Colus der Sonnenwenden vorstellt,

$$p'k = p'f - kf = 90^\circ - b;\ pk = pd - kd = 90^\circ - d.$$

Da nun p' s = p q, so ist p' p = s q; es ist aber s q das Maß des sphärischen Winkels s c q oder der Schiefe der Ecliptik, daher p' p = e. Ferner ist das Maß des sphärischen Winkels a p d = a c + c d = 90° + a, weil außer p d auch p a ein Quadrant ist, und f s das Maß des sphärischen Winkels s p' f; es ist aber f s = s c — c f = 90° — l, also s p' f = 90° — l.

In dem sphärischen Dreieck p' k p sind also die beiden Seiten p' p und p k nebst dem Zwischenwinkel a p d gegeben, und es sollen gesucht werden, die Gegenseite p' k und der anliegende Winkel p p' k nebst dem Positionswinkel v.

Die Neper'schen Formeln (5) und (6), Seite 209, geben, wenn man die hier angeführten Werthe statt der dortigen Buchstaben gebraucht,

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} (90^\circ - l + v) = \frac{\cos \frac{1}{2} (90^\circ - d - e)}{\cos \frac{1}{2} (90^\circ - d - e)} . \cot \tfrac{1}{2} (90^\circ + a),$$

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} (90^\circ - l - v) = \frac{\sin \frac{1}{2} (90^\circ - d - e)}{\sin \frac{1}{2} (90^\circ - d - e)} . \cot \tfrac{1}{2} (90^\circ + a).$$

Es sei $d = 40^\circ$ und $a = 60^\circ$, so ist, wenn $e = 23^\circ\ 28'$ gesetzt wird, $\cos \frac{1}{2} (90^\circ - d - e) = \cos 13^\circ\ 16'$; $\cos \frac{1}{2} (90^\circ - d + e) = \cos 36^\circ\ 44'$, $\cos \frac{1}{2} (90^\circ + a) = 75^\circ$.

$$\begin{array}{ll}
\log \cos 13^\circ\ 16' = & 9{,}9882523 \\
\log \cot 75^\circ = & \underline{9{,}4280525} \\
 & 9{,}4163048 \\
\log \cos 36^\circ\ 44' = & \underline{9{,}9038644} \\
 & 9{,}5124404 = \log \operatorname{tg} \frac{1}{2} (90^\circ - l + v),
\end{array}$$

also $\frac{1}{2} (90^\circ - l + v) = 18^\circ\ 1'\ 33''$.

$$\begin{array}{ll}
\log \sin 13^\circ\ 16' = & 9{,}3607515 \\
\log \cot 75^\circ = & \underline{9{,}4280525} \\
 & 8{,}7888040 \\
\log \sin 36^\circ\ 44' = & \underline{9{,}7767676} \\
 & 9{,}0120364 = \log \operatorname{tg} \frac{1}{2} (90^\circ - l - v).
\end{array}$$

$\frac{1}{2} (90^\circ - l - v) = 5^\circ\ 52'\ 12''$

Aus Vorhergehendem ist $\frac{1}{2} (90^\circ - l + v) = 18^\circ\ 1'\ 33''$

Summe $90^\circ - l = 33^\circ\ 53'\ 45''$, also $l = 56^\circ\ 6'\ 14''$.

Differenz $v = 12^\circ\ 9'\ 20''$.

Die Breite b findet man durch die Proportion

$$\sin p'k : \sin p'p = \sin a p d : \sin p' k p$$

oder $\sin (90^\circ - b) : \sin e = \sin (90^\circ + a) : \sin v$

also $\sin (90^\circ - b) = \sin e . \sin (90^\circ + a) : \sin v$.

Nun ist

$$\begin{array}{ll}
\log \sin e = & 9{,}6001181 \\
\log \sin (90^\circ + a) = & \underline{9{,}6989700} \\
 & 9{,}2990881 \\
\log \sin v = & \underline{9{,}3233892} \\
 & 9{,}9756989 = \log \sin (90^\circ - b) = \log \cos b,
\end{array}$$

also $b = 18^\circ\ 59'\ 21''$.

5) Die gerade Aufsteigung des Aldebaran beträgt $67^\circ\ 40'\ 30''$, seine Declination $16^\circ\ 8'\ 20''$ nördlich; man verlangt seine Länge, Breite und den Positionswinkel.

Auflösung. Nach der Formel vorhergehender Aufgabe ist

$\frac{1}{2} (90^\circ - d - e) = 25^\circ\ 11'\ 50''$; $\frac{1}{2} (90^\circ - d + e) = 48^\circ\ 39'\ 50''$;

$\frac{1}{2} (90^\circ + a) = 78^\circ\ 50'\ 15''$.

$$\log\cos 25^\circ 11' 50'' = 9{,}9565755$$
$$\log\cot 78^\circ 50' 15'' = 9{,}2952325$$
$$9{,}2518080$$
$$\log\cos 48^\circ 39' 50'' = 9{,}8198565$$
$$9{,}4319515 = \log \mathrm{tg}\, \tfrac{1}{2}(90^\circ - l + v),$$
$$\tfrac{1}{2}(90^\circ - l + v) = 15^\circ\ 7'\ 44{,}8''.$$

$$\log\sin 25^\circ 11' 50'' = 9{,}6289831$$
$$\log\cot 78^\circ 50' 15'' = 9{,}2952325$$
$$8{,}9242156$$
$$\log\sin 48^\circ 39' 50'' = 9{,}8755521$$
$$9{,}0486635 = \log \mathrm{tg}\, \tfrac{1}{2}(90^\circ - l - v).$$

$$\tfrac{1}{2}(90^\circ - l - v) = 6^\circ\ 22'\ 4''$$

Vorher war $\tfrac{1}{2}(90^\circ - l + v) = 15^\circ\ 7'\ 44{,}8''$

Summe $90^\circ - l = 21^\circ\ 29'\ 48{,}8''$, also $l = 68^\circ\ 30'\ 11{,}2$.

Differenz $v = 8^\circ\ 45'\ 40{,}8''$ = dem Positionswinkel.

Nun suche man die Breite, also

$$\log\sin c = 9{,}6001181$$
$$\log\sin(90^\circ + a) = 9{,}5796233$$
$$9{,}1797414$$
$$\log\sin v = 9{,}1827537$$
$$9{,}9969877 = \log\sin(90^\circ - b) = \log\cos b,$$

also die Breite $b = 6^\circ\ 44'\ 26''$.

Anmerkung. Wenn der Positionswinkel v gefunden ist, dann läßt sich die Breite b ebenfalls nach einer der oben angezeigten Formeln (Seite 209) bestimmen, wie das nächste Beispiel zeigen wird, und zwar bedient man sich derselben noch lieber als der vorigen Berechnung.

Allgemeine Bemerkungen.

Wenn die gerade Aufsteigung größer als 90° ist, so nehme man statt derselben ihr Supplement zu 180°; fällt sie zwischen 180° und 270°, so vermindere man sie um 180° und wenn sie größer als 270° ist, so nehme man ihre Ergänzung zu 360° (vgl. Aufg. 3) oder was dasselbe ist, man muß immer den Abstand des Sterns vom nächsten Aequinoctium annehmen, dabei aber bemerken, statt der gefundenen Länge, im zweiten Quadrante ihr Supplement zu 180° zu rechnen, im dritten 180° zu addiren, und im vierten die Ergänzung zu 360° zu nehmen.

Denkt man sich von k durch c den Bogen eines größten Kreises gelegt, so ist der Winkel k c f, wenn der Himmelskörper k in der nördlichen Halbkugel und seine Declination südlich ist; und eben so, wenn k südlich und die Declination nördlich ist, der Summe k c d + f c q gleich. In allen anderen Fällen ist jener Winkel immer einerlei mit der Differenz zwischen k c d und f c q.

Die Breite des Sterns hat immer mit der Declination einerlei Vorzeichen, mit Ausnahme des Falles, wo derselbe zwischen dem Aequator und der Ecliptik liegt, und seine Breite und Declination unter sich entgegengesetzte Vorzeichen, d. h. wenn z. B. die Declination südlich ist, so ist die Breite nördlich.

6) Man fragt nach der Länge und Breite des Mondes, wenn seine Rectascention 304° 21′, und seine südliche Declination 22° 57′ beträgt.

Auflösung. Da die Abweichung südlich, also negativ ist, so muß p k größer sein als p′ p; also ist jetzt

$$\tfrac{1}{2}(pk - p'p) = \tfrac{1}{2}(90^\circ + d - e) = 44^\circ\, 44'\, 35{,}5'',$$

wo $e = 23^\circ\ 27'\ 49''$ angenommen ist,

$$\tfrac{1}{2}(pk + p'p) = \tfrac{1}{2}(90^\circ + d + e) = 68^\circ\, 22'\, 24{,}5''.$$

$$\tfrac{1}{2}(90^\circ + a) = \tfrac{1}{2}(90^\circ + 304^\circ\, 21') = \tfrac{1}{2}(360^\circ + 34^\circ\, 21')$$
$$= 180^\circ + 17^\circ\, 10'\, 30''.$$

Also

$$\begin{array}{ll} \log\cos 44^\circ\, 44'\, 35{,}5'' = & 9{,}8514528 \\ \log\cot 17^\circ\, 10'\, 30'' = & \underline{10{,}5099381} \\ & 10{,}3613909 \\ \log\cos 68^\circ\, 22'\, 24{,}5'' = & \underline{\ 9{,}5666191} \\ & 10{,}7947718 = \log tg\, \tfrac{1}{2}(90^\circ + l + v), \end{array}$$

daher $\tfrac{1}{2}(90^\circ + l + v) = 80^\circ\ 53'\ 13''$.

$$\begin{array}{ll} \log\sin 44^\circ\, 44'\, 35{,}5'' = & 9{,}8475317 \\ \log\cot 17^\circ\, 10'\, 30'' = & \underline{10{,}5099381} \\ & 10{,}3574698 \\ \log\sin 68^\circ\, 22'\, 24{,}5'' = & \underline{\ 9{,}9682989} \\ & 10{,}3891709 = \log tg\, \tfrac{1}{2}(90^\circ + l - v), \end{array}$$

folglich $\tfrac{1}{2}(90^\circ + l - v) = 67^\circ\ 47'\ 48''$.

Aus den beiden Resultaten ergiebt sich

$v = 13^\circ\ 5'\ 25''$, und $90^\circ + l = 147^\circ\ 41'\ 1''$,

folglich $l = 147^\circ\ 41'\ 1'' - 90^\circ = 57^\circ\ 41'\ 1''$.

Da nun aber die Länge in den vierten Quadranten fällt, so muß man vermöge der Anmerkung voriger Aufgabe die Ergänzung zu 360° nehmen; also ist die wahre Länge

$$l = 360^\circ - 57^\circ\ 41'\ 1'' = 302^\circ\ 18'\ 59''.$$

Die Breite berechne man nach einer der obigen Formeln (S. 209), etwa nach folgender

$$\sin\tfrac{1}{2}(A - B)\sin\tfrac{1}{2}c = \sin\tfrac{1}{2}(a - b).\cos C,$$

wo c die Seite $p'k = 90^\circ - b$, dann A, B, a, b und C die obige Bedeutung haben. Wir erhalten also durch Einsetzung der entsprechenden Werthe $\sin\tfrac{1}{2}(90^\circ - b)$

$$= \sin\tfrac{1}{2}(90^\circ - d - e).\cos\tfrac{1}{2}(90^\circ + a) : \sin\tfrac{1}{2}(90^\circ - l - v).$$

Da aber die Declination negativ ist so muß ihr Vorzeichen in das entgegengesetzte verwandelt werden, demnach ist

$$\tfrac{1}{2}(90^\circ + d - e) = 44^\circ\, 44'\, 35{,}5''; \; \tfrac{1}{2}(90^\circ + a) = 17^\circ\, 10'\, 30''.$$

Was die Länge betrifft, so muß die Ergänzung zu 360° genommen, dann wieder 90° hinzugelegt werden, nämlich

$$90^\circ - l = 360^\circ - 302^\circ\, 19' + 90^\circ, \text{ also } \tfrac{1}{2}(90^\circ - l - v) = 67^\circ\, 17'\, 48''.$$

Die Rechnung steht also:

$$\begin{array}{ll} \log\sin 44^\circ\, 44'\, 35{,}5'' & = 9{,}8475317 \\ \log\cos 17^\circ\, 10'\, 30'' & = \underline{9{,}9801886} \\ & \ 9{,}8277203 \\ \log\sin 67^\circ\, 17'\, 48'' & = \underline{9{,}9649737} \\ & \ 9{,}8627466 = \log\sin\tfrac{1}{2}(90^\circ - b), \end{array}$$

$$\tfrac{1}{2}(90^\circ - b) = 46^\circ\, 49'\, 19''; \text{ also } b = -3^\circ\, 38'\, 38''.$$

Der negative Werth von b zeigt an, daß die Breite wie die Declination südlich ist.

7) Die gerade Aufsteigung des Mondes sei = 36° 36′, seine Declination 10° 28′ nördlich: wie groß ist seine Länge und Breite?

Auflösung. Wir erhalten nach den allgemeinen Formeln

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(90^\circ - l + v) = \cos 28^\circ\, 2'\, 5{,}5''.\cot 63^\circ\, 18'' : \cos 51^\circ\, 29'\, 54{,}5'',$$
$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(90^\circ - l - v) = \sin 28^\circ\, 2'\, 5{,}5''.\cot 63^\circ\, 18'' : \sin 51^\circ\, 29'\, 54{,}5''.$$

$$\begin{array}{ll} \log\cos 28^\circ\, 2'\, 5{,}5'' & = 9{,}9457934 \\ \log\cot 63^\circ\, 18' & = \underline{9{,}7015227} \\ & = 9{,}6473161 \\ \log\cos 51^\circ\, 29'\, 54{,}5'' & = \underline{9{,}7941641} \\ & \ 9{,}8531520 = \log\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(90^\circ - l + v), \end{array}$$

$$\tfrac{1}{2}(90^\circ - l + v) = 35^\circ\, 29'\, 34''.$$

$$\begin{array}{ll} \log\sin 28^\circ\, 2'\, 5{,}5'' & = 9{,}6721058 \\ \log\cot 63^\circ\, 18' & = \underline{9{,}7015227} \\ & \ 9{,}3736285 \\ \log\sin 51^\circ\, 29'\, 54{,}5'' & = \underline{9{,}8935352} \\ & \ 9{,}4800933 = \log\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(90^\circ - l - v), \end{array}$$

$$\tfrac{1}{2}(90^\circ - l\ v) = 16^\circ\, 48'\, 27''.$$

Aus beiden Resultaten folgt

$$l = 37^\circ\, 29'\, 34''$$
und $$v = 18^\circ\, 41'\, 7''.$$

Zur Bestimmung der Breite ist mit Anwendung dieser erhaltenen Werthe nach der in vorhergehender Aufgabe gebrauchten Formel

$$\sin\tfrac{1}{2}(90^\circ - b) = \sin 28^\circ\, 2'\, 5{,}5 . \cos 63^\circ\, 18' : \sin 16^\circ\, 54'\, 39{,}5''.$$

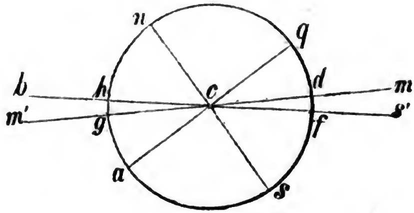
$$\begin{array}{lcl} \log\sin 28^\circ\,2'\,5{,}5'' & = & 9{,}6721058 \\ \log\cos 63^\circ\,18' & = & 9{,}6525548 \\ \hline & & 9{,}3246606 \\ \log\sin 16^\circ\,54'\,39{,}5'' & = & 9{,}4637219 \\ \hline & & 9{,}8609387 = \log\sin\tfrac{1}{2}(90^\circ - b), \end{array}$$

woraus folgt $b = -3^\circ\ 6'\ 17{,}2''$ als die südliche Breite.

Erläuternde Bemerkungen.

Um sich die entgegengesetzten Beziehungen zwischen der Abweichung und Breite des Mondes deutlich vorzustellen, so sei (Fig. 189) die Erde, c ihr Mittelpunkt, n s ihre Achse, a q der Aequator, n der Nordpol und s der Südpol; dann sei b s ein Stück der Erdbahn oder der Ecliptik und m′m die Mondbahn, die sonach zwischen dem Aequator und der Ecliptik liegt. Ist nun der Mond in m, so ist der Winkel q c d oder der Bogen q d seine Abweichung, also südlich, und der Winkel f c d oder der Bogen f d seine Breite; diese ist aber, obgleich in der südlichen Halbkugel, dennoch nach Norden, nämlich von f nach d gerichtet, d. h. sie ist nördlich. Ist hingegen der Mond in m′, so ist a g seine Abweichung, also nördlich, und h g seine Breite; diese ist aber jetzt nach dem Südpol s gerichtet, mithin ist sie südlich.

Fig. 189.



Da die Neigung der Bahn des Mondes gegen die Ecliptik ungefähr 5° beträgt, so kann seine Breite nie über diese Größe hinausgehen. Seine Abweichung kann aber der Schiefe der Ecliptik gleich und noch um 5° größer werden. Eine weitere Auseinandersetzung dieses Gegenstandes gehört nicht an diesen Ort.

8) Die gerade Aufsteigung des von dem Herrn Dr. Petersen in Altona im Jahr 1848 neu entdeckten Cometen war am 23. November um 6 Uhr mittlerer Greenwicher Zeit = 306° 18′ 5″ und seine Declination = 40° 9′ 32″ nördlich. Wie viel betrug zu jener Zeit seine Länge und seine Breite?

Auflösung. Es ist, indem die Schiefe der Ecliptik für gegenwärtige Zeit oder eigentlich für das Jahr 1851 zu 23° 27′ 31″,5 angenommen ist

$$\lg\tfrac{1}{2}(90^\circ - l + v) = \cos 13^\circ\,11'\,28{,}3''\,.\,\cot 18^\circ\,9'\,2{,}5'' : \cos 36^\circ\,38'\,59{,}75''$$
$$\lg\tfrac{1}{2}(90^\circ - l - v) = \sin 13^\circ\,11'\,28{,}3''\,.\,\cot 18^\circ\,9'\,2{,}5'' : \sin 36^\circ\,38'\,59{,}75''$$

$$\log\cos 13^\circ\, 11'\, 28'',3 = 9{,}9883869$$
$$\log\cot 48^\circ\ 9'\ 2'',5 = 10{,}4843519$$
$$\overline{10{,}4727383}$$
$$\log\cos 36^\circ\, 38'\, 59'',75 = 9{,}9043355$$
$$\overline{10{,}5684028} = \log \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\,(90^\circ - l + v)$$
$$\tfrac{1}{2}\,(90^\circ - l + v) = 74^\circ\ 52'\ 57'',6$$
$$\log\sin 13^\circ\, 11'\, 28'',3 = 9{,}3583179$$
$$\log\cot 18^\circ\ 9,\ 2'',5 = 10{,}4843514$$
$$\overline{9{,}8426693}$$
$$\log\sin 36^\circ\, 38'\, 59'',75 = 9{,}7759193$$
$$\overline{10{,}0667500} = \log \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\,(90^\circ - l - v)$$
$$\tfrac{1}{2}\,(90^\circ - l - v) = 49^\circ\ 23'\ 9''.$$

Aus beiden Ergebnissen folgt $l = 325^\circ\ 43'\ 53'',4$ und $v = 21^\circ\ 49'\ 53''$.

Ferner ist $\sin \tfrac{1}{2}\,(90^\circ - b) = \sin 13^\circ\, 11'\, 28'',3 \,.\, \cos 18^\circ\, 9'\, 2'',5 :$ $\sin 49^\circ\ 18'\ 9''$

$$\log\sin 13^\circ\, 11'\, 28'',3 = 9{,}3583189$$
$$\log\cos 18^\circ\ 9'\ 2'',5 = 9{,}9778340$$
$$\overline{9{,}3361519}$$
$$\log\sin 49^\circ\, 18'\ 9'' = 9{,}8797625$$
$$\overline{9{,}4563894} = \log\sin \tfrac{1}{2}\,(90^\circ - b).$$

Man findet $b = 56^\circ\ 45'\ 32''$ nördlich.

Anmerk. Die von nun an den Rechnungen zum Grunde gelegten Bestimmungsstücke, d. h. die geraden Absteigungen, Abweichungen, Längen und Breiten nebst der Schiefe der Ecliptik sind für das Jahr 1850 und 51 berechnet.

9) Die gerade Aufsteigung des Arctur ist $= 212^\circ\ 17'\ 58'',5$ und seine Abweichung $= 19^\circ\ 57'\ 37{,}16''$ nördlich; wie groß ist seine Länge und Breite?

Antwort. Seine Länge ist $= 202^\circ\ 11'\ 35''$, und Breite $= 31^\circ\ 29'\ 12''$ nördlich.

10) Die gerade Aufsteigung des Sirius beträgt für das Jahr 1851 $99^\circ\ 38'\ 47'',4$ und seine Declination $16^\circ\ 30'\ 57'',24$ südlich; wie groß ist seine Länge und Breite ohne Rücksicht auf die jährliche Variation?

Antwort. Die Länge ist $= 102^\circ\ 10'\ 23''$ und die Breite $= 41^\circ\ 27'\ 8''$ südlich.

11) Die gerade Aufsteigung des Antares beträgt in Zeit ausgedrückt $16^h\ 20^m\ 16^s{,}689$ und seine Declination $26^\circ\ 5'\ 47'',07$; man verlangt seine Länge und Breite. Die Abweichung ist südlich.

Antwort. Die Länge ist $= 247^\circ\ 40'\ 12''$ und die Breite $= 4^\circ\ 33'\ 24''$ südlich.

12) a. Aus der gegebenen Länge und Breite eines Gestirns nebst der Schiefe der Ecliptik seine Rectascension und Declination zu finden.

Auflösung. Die gerade Aufsteigung und die Abweichung werden aus der gegebenen Länge und Breite auf ähnliche Art wie diese aus jener und zwar durch dieselben Formeln gefunden; denn diese Auflösung ist das umgekehrte Verfahren der vorigen Auflösung. Man betrachte deshalb obige Figur wieder, wo p den Pol des Aequators und zwar den Nordpol und p' den Pol der Ecliptik vorstellt, so ist jetzt außer der Seite $p'p = e$ auch die Seite $p'k = 90^\circ - b$, dann der sphärische Winkel $pp'k$ bekannt, dessen Maß der Bogen $fs = 90^\circ - l$ ist. Aus den beiden gegebenen Seiten $p'p$, $p'k$ nebst dem Zwischenwinkel $pp'k$ soll die Gegenseite pk gesucht werden; ist dann pk oder kd gefunden, so wird aus den gegebenen Stücken $p'p$, pk nebst dem Zwischenwinkel $p'pk$ die Gegenseite ad oder cd gesucht.

Nach den Neper'schen Analogieen ist also

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(90^\circ + a + v) = \frac{\cos \frac{1}{2}(90^\circ - b - e) \,.\, \cot \frac{1}{2}(90^\circ - l)}{\cos \frac{1}{2}(90^\circ - b + e)}$$

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(90^\circ + a - v) = \frac{\sin \frac{1}{2}(90^\circ - b - e)}{\sin \frac{1}{2}(90^\circ - b + e)} \cot \tfrac{1}{2}(90^\circ - l).$$

Für die Bestimmung der Declination aus einer der obigen Formeln (Seite 209) ist

$$\sin \tfrac{1}{2}(90^\circ - d) = \sin \tfrac{1}{2}(99^\circ - b - e) \,.\, \cos \tfrac{1}{2}(90^\circ - l) : \sin \tfrac{1}{2}(90^\circ + a - v).$$

Es sei $l = 60^\circ$, $b = 10^\circ$ nördlich, $e = 23^\circ\, 27'\, 31{,}5''$; man verlangt a und d.

Auflösung. Die Anwendung dieser Werthe in obigen Gleichungen liefert

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(90^\circ + a + v) = \cos 28^\circ\, 16'\, 14'' \,.\, \cot 15^\circ : \cos 51^\circ\, 43'\, 46''$$

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(90^\circ + a - v) = \sin 28^\circ\, 16'\, 14'' \,.\, \cot 15^\circ : \sin 51^\circ\, 43'\, 46''.$$

Nach gehöriger Ausführung der Rechnung findet sich aus der ersteren Gleichung

$$10{,}7248316 = \log \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(90^\circ + a + v), \text{ also}$$

$$\tfrac{1}{2}(90^\circ + a + v) = 79^\circ\, 19'\, 42''$$

und aus der letzteren

$$10{,}3524698 = \log \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(90^\circ + a - v), \text{ und}$$

$$\tfrac{1}{2}(90^\circ + a - v) = 66^\circ\, 3'\, 6''.$$

Aus beiden Ergebnissen folgt

$$a = 55^\circ\, 32'\, 48'', \text{ und } v = 13^\circ\, 16'\, 36''.$$

Ferner ist

$$\sin \tfrac{1}{2}(90^\circ - d) = \sin 28^\circ\, 16'\, 14 \,.\, \cos 15^\circ : \sin 66^\circ\, 38'\, 6''.$$

Man erhält

$$9{,}6975469 = \log \tfrac{1}{2}(90^\circ - d),$$

woraus hervorgeht

$$d = 30^\circ\, 12'\, 59'' \text{ nördlich.}$$

Anmerkung. Wenn b negativ ist, so muß es in obiger Formel das entgegengesetzte Zeichen erhalten, so wie es eben bei der Declination der Fall ist.

12) b. Es sei die Länge eines Gestirns = 325°, seine Breite = 56° nördlich; wie groß ist seine gerade Aufsteigung und seine Abweichung?

Auflösung. Werden diese Werthe in obige Formeln gesetzt, so erhält man

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(90^\circ + a + v) = \cos 5^\circ 16' 14''. \cot 62^\circ 30' : \cos 28^\circ 43' 46'',$$
$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(90^\circ + a - v) = \sin 5^\circ 16' 14''. \cot 62^\circ 30' : \sin 28^\circ 43' 46''.$$

Was nämlich den Ausdruck $\frac{1}{2}(90^\circ - l)$ betrifft, und da $l = 325^\circ$ ist, also in den vierten Quadranten gehört, so muß man das Supplement zu 325° d. i. $360^\circ - 325 = 35^\circ$ nehmen und 90° hinzufügen, also ist $\frac{1}{2}(90^\circ - l) = \frac{1}{2}(90 + 360 - 325) = \frac{1}{2} . 125^\circ = 62^\circ 30'$.

Wir erhalten demnach folgende Ausdrücke:

$$9{,}7716789 = \log \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(90^\circ + a + v),$$
also $$\tfrac{1}{2}(90^\circ + a + v) = 30^\circ\ 35'\ 18'';$$
$$8{,}9977419 = \log \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(90^\circ + a - v),$$
also $$\tfrac{1}{2}(90^\circ + a - v) = 5^\circ\ 50'\ 2''.$$

Daraus folgt die Differenz der beiden Resultate oder der Positionswinkel

$$v = 24^\circ\ 54'\ 14'',$$

und ihre Summe

$$90^\circ + a = 36^\circ\ 16'\ 10''.$$

Da nun die gegebene Länge in den vierten Quadranten gehört, so fällt auch die Rectascension in diesen, folglich muß die Ergänzung von $90^\circ + a$ zu 360° genommen werden. Da aber hier 90° schon mit in 360° begriffen ist, so ist diesem Werthe noch 270° hinzuzulegen. Die eigentliche Rectascension ist daher

$$a = 36^\circ 16' 10'' + 270^\circ = 306^\circ 16' 10''.$$

Alsdann erhalten wir aus der Gleichung

$$\sin \tfrac{1}{2}(90^\circ - d) = \sin 5^\circ 16' 14''. \cos 62^\circ 30'' : \sin 5^\circ 40' 58''$$

den Werth $\frac{1}{2}(90^\circ - d) = 25^\circ 21' 47''$, daher $d = 39^\circ 16' 26''$.

Da dieser Werth positiv ausfällt, so ist die Abweichung nördlich.

Anmerkung. Die Ausdrücke $\frac{1}{2}(90^\circ - l)$, welche die Herleitung der Formel herbeigeführt hat, sind, ungeachtet l größer als 90° ist, dennoch nicht negativ; denn auch hier gelten die in obiger Bemerkung (Aufg. 5) aufgestellten Regeln. Da nämlich hier l in den vierten Quadranten fällt, so muß sein Supplement zu 360° genommen werden, aber wegen des negativen Zeichens ist vorerst 360° zu 90° zu addiren, dann l davon zu subtrahiren; also ist hier in diesem Falle

$$90^\circ - l = 90^\circ + 360^\circ - 325^\circ = 125^\circ.$$

Man vergleiche hiermit die nächste Aufgabe.

13) Am 4. Januar 1850 um 12 Uhr Nachts wird die Länge des Mondes 189° 34′ 57″,8 und seine nördliche Breite 3° 40′ 27″,5 betragen; welches ist dann seine gerade Aufsteigung und seine Abweichung für $e = 23° 27' 30''$?

Auflösung. Die obigen allgemeinen Gleichungen nach Einsetzung der numerischen Werthe geben

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} (90° + a + v) = \frac{\cos 36° 26' 1'',3}{\cos 54° 53' 31'',3} . \cot 49° 47' 28{,}9'',$$

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} (90° + a - v) = \frac{\sin 31° 26' 1'',3}{\sin 54° 53' 31'',3} . \cot 49° 47' 28{,}9''.$$

Da hier die Länge l in den dritten Quadranten fällt, so ziehe man von dem gegebenen Werthe 180° ab und füge, wegen $90° - l$, dem Reste 90 bei.

$$\begin{array}{lr}
\log \cos 31° 26' 1'',3 = & 9{,}9310582 \\
\log \cot 49° 47' 28'',9 = & 9{,}9270232 \\
\hline
 & 9{,}8580814 \\
\log \cos 54° 53' 31'',3 = & 9{,}7599452 \\
\hline
 & 10{,}0981362 = \log \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} (90° + a + v),
\end{array}$$

$$\tfrac{1}{2} (90° + a + v) = 51° 25' 8'',7.$$

$$\begin{array}{lr}
\log \sin 31° 26' 1'',3 = & 9{,}7172639 \\
\log \cot 49° 47' 28'',9 = & 9{,}9270232 \\
\hline
 & 9{,}6442871 \\
\log \sin 54° 53' 31'',3 = & 9{,}9126977 \\
\hline
 & 9{,}7315894 = \log \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} (90° + a - v),
\end{array}$$

$$\tfrac{1}{2} (90 + a - v) = 28° 19' 28'',7.$$

Daraus folgt $v = 23° 5' 40''$,

und $90° + a = 79° 44' 37'',4$,

also $= 10° 15' 22'',6$.

Da aber vermöge der gegebenen Länge die Retascension in den dritten Quadranten fällt, so muß nach obiger Bemerkung (Aufg. 5) noch ein Werth von 180° zugelegt werden. Die eigentliche Rectascension ist demnach

$$a = 190° 15' 22{,}6''.$$

Ferner $$\sin \tfrac{1}{2} (90° - d) = \frac{\sin 31° 26' 1'',3 . \cos 49° 47' 28'',9}{\sin 28° 19' 28'',7},$$

daraus folgt $\tfrac{1}{2} (90° - d) = 45° 12' 3'',7$,

also $90° - d = 90° 24' 7'',4$,

demnach $d = - 24' 7'',4$.

Da dieser Werth negativ ist, so ist die Abweichung südlich.

14) Am 1. Januar desselben Jahres um 0 Uhr, d. h. Mittags um 12 Uhr, wird die Länge des Mondes = 141° 12′ 53″,9 und seine Breite = 17′ 43″,3 südlich sein; man will seine gerade Aufsteigung und seine Declination wissen.

Auflösung. Da die Länge in den zweiten Quadranten fällt, so hat man ihr Supplement zu 180° zu nehmen, dann, wegen 90° — l, 90° hinzuzulegen, oder, was dasselbe ist, ihr Supplement zu 270° zu nehmen. Es wird also $\frac{1}{2}$ (90° — l) = $\frac{1}{2}$ (270° — 141° 12′ 53,9) = 64° 23′ 33″; und da die Breite südlich ist, so hat man in unsern Formeln b mit entgegengesetztem Zeichen zu nehmen. Man erhält demnach

$$\text{tg}\,\tfrac{1}{2}(90^\circ+a+v) = \cos 33^\circ 11' 36'',7 \,.\, \cot 64^\circ 23' 33'' : \cos 56^\circ 52' 36'',7;$$

$$\text{tg}\,\tfrac{1}{2}(90^\circ+a-v) = \sin 33^\circ 11' 36'',7 \,.\, \cot 64^\circ 23' 33'' : \sin 56^\circ 62' 36'',7.$$

Nach gehöriger Ausführung der Rechnung erhält man

$$\tfrac{1}{2}(90^\circ + a + v) = 36^\circ 16' 40''; \quad \tfrac{1}{2}(90^\circ + a - v) = 17^\circ 23' 42'';$$

folglich $90^\circ + a = 53^\circ 40' 22''$, und $v = 18^\circ 52' 58''$.

Da nun die gerade Aufsteigung in den zweiten Quadranten fällt, so sind noch 90° hinzu zu addiren. Die eigentliche Rectascension ist demnach

$$a = 143^\circ\ 40'\ 22''.$$

Die Zulegung zu 90° ist eben so viel, als wenn man aus vorhergehender Gleichung den Werth a wirklich bestimmt, wodurch man erhält a = 53° 40′ 22″ — 90° = — 36° 19′ 38″, dann denselben, da er negativ ist, zu 180° addirt, statt daß er im entgegengesetzten Falle davon subtrahirt wird, also mit obiger Bemerkung übereinstimmend. Etwas Aehnliches gilt auch in den drei vorhergehenden Aufgaben.

Für die Abweichung ist

$$\tfrac{1}{2}(90^\circ - d) = \sin 33^\circ 11' 36'',7 \,.\, \cos 641\ 23' 33'' : \sin 17^\circ 23' 22'';$$

daraus erhält man d = 14° 9′ 31″,5 nördlich.

15) Am 4. Januar Mittags ist die Länge des Mondes = 183° 0′ 7″,8 und seine Breite = 3° 13′ 50″,5 nördlich; wie groß ist seine gerade Aufsteigung und seine Abweichung?

Antwort. Die gerade Aufsteigung ist = 18° 2′ 15″, und die Abweichung = 1° 46′ 11″,4 nördlich.

16) Die gerade Aufsteigung des Mondes beträgt am 14. März Mittags 37′ 0″,15, und seine Abweichung = 3° 3′ 45″,1 südlich; wie groß ist seine Länge und seine Breite?

Antwort. Seine Länge ist = 359° 20′ 43″,7, und seine Breite = 3° 3′ 16″,8 südlich.

17) Am 1. Januar ist die Länge der Sonne 280° 45′ 53″,7 bei einer südlichen Abweichung von 23° 1′ 12″,3; man verlangt ihre gerade Aufsteigung in Zeitmaß ausgedrückt.

Antwort. 18 Stunden 46 Min. 49,36 Sec.

18) Am 16. August Mittags ist die Länge des Mondes $= 252°\ 58'\ 55'',4$, bei einer nördlichen Breite von $4°\ 39'\ 56'',1$; wie viel beträgt seine gerade Aufsteigung in Zeitmaß und seine Abweichung?

Antwort. Die gerade Aufsteigung ist $=$ 16 St. 48 M. 39,69 Sec. und die Abweichung $= 17°\ 4'\ 36''$ südlich.

19) Die gerade Aufsteigung der Sonne am 24. September beträgt in Zeit ausgedrückt 12 St. 3 M. 44,45 Sec.; welches ist ihre Länge und ihre Abweichung?

Antwort. Ihre Länge ist $= 181°\ 1'\ 50''$, bei einer südlichen Abweichung $= 0°\ 24'\ 21'',5$.

20) Am 15. Februar Mitternachts ist die Länge des Mondes $= 9°\ 11'\ 47'',1$, und seine Breite $= 3°\ 46'\ 45''$ südlich; wie groß ist seine gerade Aufsteigung in Zeitmaß und seine Abweichung?

Antwort. Die gerade Aufsteigung beträgt 39. M. 44,39 Sec. und seine Abweichung $0°\ 10'\ 21'',9$ nördlich.

21) Aus der gegebenen geraden Aufsteigung und der Abweichung eines Gestirns nebst der Schiefe der Ecliptik seine Länge und Breite nach anderen als den bisherigen Formeln und zwar nach solchen zu bestimmen, die aus rechtwinkeligen sphärischen Dreiecken abgeleitet sind.

Auflösung. Wenn wir in der (Aufg. 40) gebrauchten Fig. 192, dieselben Bezeichnungen beibehaltend, uns von dem angenommenen Stern k bis zum Frühlings-Nachtgleichenpunkte c den Bogen k c eines größten Kreises gezogen denken, so entstehen zwei rechtwinkelige Dreiecke k c d und k c f, wo in dem ersteren bei d, in dem letzteren bei f der rechte Winkel ist.

Man bestimme nun aus den gegebenen Stücken $c d = a$ und $d k = d$ zuerst den Winkel $k c d = w$ und die Seite $c k = z$, so ist nach obigen Formeln (Seite 228)

$$\cot k c d = \cot k d . \sin c d,$$

oder 1) $$\cot w = \cot d . \sin a,$$

$$\cos k c = \cos k d . \cos c d$$

oder 2) $$\cos z = \cos d . \cos a.$$

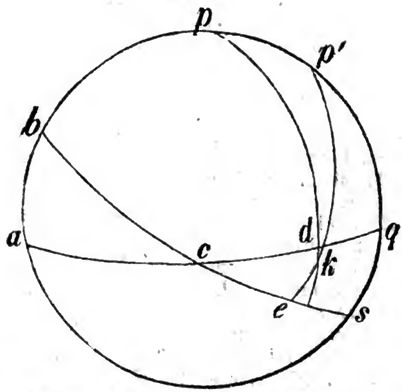
Ferner ist in dem rechtwinkeligen Dreieck k f c, wo der rechte Winkel bei f ist, die Seite $k c = z$ und der Winkel $k c f = k c d - f c d = w - e$ bekannt, und man findet die Seiten $c f = l$ und $k f = b$ oder die Länge und die Breite nach den Formeln (Seite 228)

$$\operatorname{tg} c f = \operatorname{tg} k c . \cos (k c d - f c d),$$

oder 3) $$\operatorname{tg} l = \operatorname{tg} z . \cos (w - e),$$

ingleichen 4) $$\sin b = \sin z . \sin (w - e).$$

Fig. 190.



Liegt das Gestirn k zwischen dem Aequator und der Ecliptik (Fig. 190), wo a q den Aequator, p seinen Pol, b s die Ecliptik und p′ ihren Pol bezeichnet, so ist, wenn p k den Bogen eines Abweichungskreises und p′ f den eines Breitenkreises vorstellt, c d des Gestirns gerade Aufsteigung, d k seine südliche Declination, c f seine Länge und f k seine nördliche Breite.

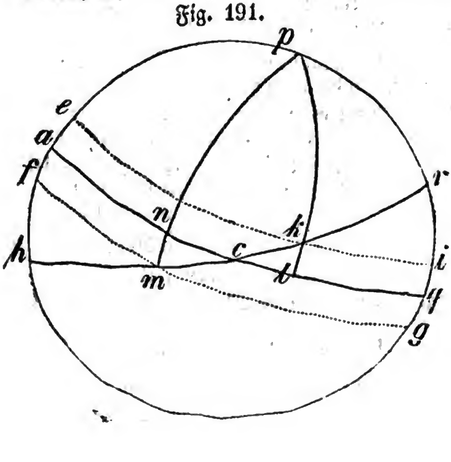
Denken wir wieder wie vorher vom Frühlingspunkt c bis an den Stern k den Bogen c k = z eines größten Kreises gelegt und bezeichnen jetzt den Winkel d c k mit w, so bleiben die Formeln (1) und (2) ungeändert, hingegen die beiden letztern verwandeln sich in folgende:

$$5) \qquad \text{tg}\, l = \text{tg}\, z \,.\, \cos(e - w),$$

$$6) \qquad \sin b = \sin z \,.\, \sin(e - w).$$

Es ist also in obigem Fall die Schiefe der Ecliptik kleiner, in diesem größer als der Winkel w.

Fig. 191.



22) Aus der Polhöhe eines Orts und der Abweichung der Sonne ihren Tagebogen oder die Zeit von ihrem Aufgange bis zum Untergange, ingleichen den längsten und kürzesten Tag desselben Ort zu bestimmen.

Auflösung. Es sei (Fig. 191) h r der Horizont, h e p r sein Meridian am Himmel, p r die Polhöhe, a q der Aequator und ein Gestirn bewege sich in dem Parallelkreis e i, so ist e k der halbe Tagebogen desselben, weil k der Untergangspunkt des Gestirns ist. Man ziehe darauf den Abweichungskreis p k l, so ist k l die Abweichung des Gestirns und l a und k e sind ähnliche Bogen, ferner ist l a das Maß des sphärischen Winkels a p l (oder h p k). Aus der Größe dieses Winkels ergiebt sich demnach die Größe des halben Tagebogens.

Wir haben nämlich das rechtwinkelige Dreieck h p k zu betrachten, in welchem der rechte Winkel bei h ist, weil h dem Durchschnittspunkt des Meridians und des Horizonts darstellt.

Es ist also aus der Seite h p = 180° — p r, d. i. 180° — Polhöhe und p k = 90° — k l, d. i. 90° — Abweichung den Winkel h p k zu suchen. Dieser Winkel heißt der Stundenwinkel.

Bezeichnen wir die Polhöhe p r mit p, die Abweichung k l mit d, und den Winkel h p k mit t, so ist, da $\cos B = \frac{\operatorname{tg} c}{\operatorname{tg} a}$ ist, (S. 228)

$$\cos t = \frac{\operatorname{tg} hp}{\operatorname{tg} pk} = \frac{\operatorname{tg}(180^\circ - p)}{\operatorname{tg}(90^\circ - d)} = -\frac{\operatorname{tg} p}{\cot d} = -\operatorname{tg} p . \operatorname{tg} d.$$

Der negative Werth für cos t zeigt an, daß t größer als 90° ist. Befindet sich dagegen das Gestirn auf der andern Seite des Aequators, z. B. in dem Parallelkreis f g, so ist f m der halbe Tagebogen, und, wenn p m ein Abweichungskreis und n m die südliche Abweichung des Gestirns, also der rechte Winkel bei n ist, so hat man p m b = p n + n m = 90° + d, folglich tg p m = — cot d,

$$\cos t = + \operatorname{tg} p . \operatorname{tg} d.$$

Aus der Größe des Tagebogens eines Gestirns findet man, wie lange es über dem Horizonte des Orts verweilt.

23) Man will den längsten Tag für einen Ort z. B. für Hamburg wissen, dessen Polhöhe 53° 33′ ist.

Auflösung. An diesem Tage hat die Sonne eine nördliche Abweichung gleich der Schiefe der Ecliptik = 23° 28′, daher

$$\cos t = - \operatorname{tg} p \operatorname{tg} d = - \operatorname{tg} 53^\circ 33', \operatorname{tg} 23^\circ 28'.$$

$$\begin{array}{rl} \log \operatorname{tg} 53^\circ 33' = & 10{,}1315840 \\ & \underline{9{,}6376106} \\ & 9{,}7691946 = \log \cos t. \end{array}$$

Also t = 54° nahe.

Da aber wegen des negativen Werthes t größer als 90° ist, so muß sein

$$t = (180^\circ - 54^\circ) = 126^\circ,$$

welches der halbe Tagebogen ist, folglich der ganze = 252°.

Man verwandle diesen in Zeit, so ist, wenn x die Tageslänge bezeichnet,

$$360^\circ : 252^\circ = 24 \text{ Stunden} : x, \text{ also}$$

$$x = \frac{252.24}{360} = 16\tfrac{4}{5} \text{ Stunden} = 16 \text{ Stunden } 48 \text{ Minuten.}$$

Dieß ist demnach die Dauer des längsten Tages ohne Rücksicht auf Strahlenbrechung.

24) Wie viel beträgt der längste Tag eines Orts auf dem nördlichen Polarkreis, dessen Polhöhe 66° 32′ ist?

Es ist $\cos t = - \operatorname{tg} 66^\circ 32' . \operatorname{tg} 23^\circ 28'$

$$\begin{aligned} \log \operatorname{tg} 66^\circ 32' &= 10{,}3623894 \\ \log \operatorname{tg} 23^\circ 28' &= \underline{9{,}6376106} \\ & 10{,}0000000 = \log \cos t. \end{aligned}$$

Daher $\cos t = 1$, weil $\log 1 = 0$, folglich der Winkel $t = 0$. Aber wegen des obigen negativen Ausdrucks muß t größer als ein rechter Winkel sein, folglich ist $t = 180^\circ - 0^\circ = 180^\circ$, welches der halbe Tagebogen ist, daher der ganze Tagebogen $= 360^\circ$, und diese betragen, in Zeit ausgedrückt, 24 Stunden. Die Sonne geht also daselbst am längsten Tage gar nicht unter.

25) Man soll für einen Ort in der heißen Zone, der eine nördliche Breite gleich dem dritten Theil der Schiefe der Ecliptik hat, die Länge des Tages bestimmen, wenn die Sonne in sein Zenith tritt.

Es ist $\frac{23^\circ\ 28'}{3} = 7^\circ\ 49'\ 20''$; und an diesem Tage ist auch die Abweichung der Sonne der Breite des Orts gleich. Also ist

$$\cos t = - \operatorname{tg} 7^\circ\ 49'\ 20'' . \operatorname{tg} 7^\circ\ 49'\ 20''$$

$$\begin{aligned} \log \operatorname{tg} 7^\circ\ 49'\ 20'' &= 9{,}1379173 \\ & \phantom{= 9{,}13791}\underline{2} \\ & 8{,}2748346 = \log \cos t. \end{aligned}$$

Dafür finden wir in den Tafeln 88° 55′ 5″ nahe; der eigentliche Werth aber ist nach Obigem

$$t = (180^\circ - 88^\circ\ 55'\ 5'') = 91^\circ\ 4'\ 56''$$

$$\text{und verdoppelt} = 182^\circ\ 9'\ 50'' = 91\ \frac{59^\circ}{720}; \text{ daher}$$

$$x = \frac{65579}{720.15} = 12 \text{ Stunden } 8\tfrac{1}{4} \text{ Minuten, also dem längsten Tage}$$

dieses Orts gleich.

26) Tritt die Sonne in den Wendekreis des Krebses, so ist ihre Abweichung der Schiefe gleich; und es ist für denselben Ort

$$\cos t = - \operatorname{tg} 23^\circ\ 28' . \operatorname{tg} 7^\circ\ 49'\ 20'';$$

welches giebt $2t = 186^\circ\ 50'\ 20''$, und $x = 12$ St. $27\tfrac{1}{4}$ Min.

27) Steht die Sonne im Wendekreis des Steinbocks, wo also ihre Abweichung südlich ist, so ist jetzt für vorher angeführten Ort cos t positiv, und es ist nun $2t = (360° - 186° \ 50' \ 20'') = 173° \ 9, 40''$, so wie wir (die Hälfte dieses Werthes) in den Tafeln finden, oder

$$24 - (12 \text{ St. } 27\tfrac{1}{2} \text{ Min.})$$
$$= 11 \text{ St. } 32\tfrac{1}{2} \text{ Min.}$$

28) Für einen Ort auf dem Wendekreise des Krebses ist, wenn die Sonne in sein Zenith tritt, wo ihre Abweichung der Breite des Orts also auch der Schiefe der Ecliptik selbst gleich ist,

$$\cos t = - \operatorname{tg} 23° \ 28' . \operatorname{tg} 23° \ 28',$$

wo man $t = 100° \ 51' \ 30''$ und $x =$ nahe an 13 St. 27 Min. erhält.

Steht die Sonne im südlichen Wendekreis, so ist für denselben Ort cos t positiv, und es wird

$$t = 79° \ 8\tfrac{1}{2}' \text{ und } x = 10 \text{ Stunden } 33 \text{ Minuten},$$

welches der kürzeste Tag für diesen Ort ist.

29) Wie groß ist die geographische Breite eines Orts, dessen längster Tag 14 Stunden dauert, ohne Rücksicht auf Strahlenbrechung?

Aufl. Durch Verwandlung der Zeit im Bogenmaß setze man: 24 St. : 14 St. = 360° : 2 t, so folgt t = 7.15 = 105°.

Aus obiger allgemeinen Formel $\cos t = \pm \operatorname{tg} p . \operatorname{tg} d$, erhält man dann $\cos 105° = \pm \operatorname{tg} p . \operatorname{tg} 23° \ 28$, also

$$\operatorname{tg} p = - \frac{\cos 105°}{\operatorname{tg} 23° \ 28'} = + \frac{\cos 75°}{\operatorname{tg} 23° 28'}$$

$$\begin{aligned} \log \cos 75° &= 9{,}4129962 \\ \log \operatorname{tg} 23° \ 28' &= \underline{9{,}6376106} \\ & 9{,}7753856 = \log \operatorname{tg} p. \end{aligned}$$

Also $p = 30° \ 48' \ 19''$, welches die gesuchte Polhöhe oder geograph. Breite ist.

Anmerk. Da die Polhöhe nie über 90° sein kann, so entspricht p immer einerlei Werthe.

30) Die Gleichung zwischen der Höhe eines Sterns, der Abweichung desselben, dem Stundenwinkel, und der Polhöhe des Orts aufzustellen.

Auflösung. Es sei (Fig. 192) a q der Aequator, p der Pol, h r der Horizont und z das Zenith eines Orts und h p r q sein Meridian. Nun sei in k ein Stern, und man lege durch ihn den Abweichungskreis p k d und den Scheitelkreis z k l, so ist k d die Abweichung und k l die Höhe des Sterns, ferner ist a p d der Stundenwinkel und d p q die Ergänzung desselben.

Betrachten wir nun das sphärische Dreieck p z k, so ist nach der allgemeinen Formel (3) Seite 205:

$$\cos a = \cos b . \cos c + \sin b . \sin c . \cos A$$

hier $$\cos z k = \cos p z . \cos p k + \sin p z . \sin p k . \cos z p k.$$

Nun ist $z k = z l - k l$ d. i. 90° — Höhe; $p z = r z - r p$ d. i. 90° — Polhöhe, $p k = p d - k d$ d. i. 90° — Abweichung.

Bezeichnen wir die Höhe mit h, die Polhöhe mit p, die Abweichung mit d und den Stundenwinkel z p k mit t, so wird angeführte Formel

A. $$\cos (90^\circ - h)$$
$$= \cos (90^\circ - p) . \cos (90^\circ - d) + \sin (90^\circ - p) . \sin (90^\circ - d) . \cos t;$$

oder B. $$\sin h = \sin p . \sin d + \cos p . \cos d . \cos t.$$

Also ist aus (A) vermöge der Formel (5) Seite 205:

$$\cos \tfrac{1}{2} t = \sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2} [270^\circ - (h + d + p)] \sin \frac{1}{2} (90^\circ + h - p - d)}{\cos p . \cos d}}.$$

Es sei z. B. $h = 60^\circ$, $d = 40^\circ$, $p = 50^\circ$, so ist

$$\cos \tfrac{1}{2} t = \sqrt{\frac{\sin 60^\circ . \sin 30^\circ}{\cos 50^\circ . \cos 40^\circ}}.$$

Also $\log \cos \frac{1}{2} t$

$$= \tfrac{1}{2} [\log \sin 60^\circ + \log \sin 30^\circ - \log \cos 50^\circ - \log \cos 40^\circ]$$

$$\log \sin 60^\circ = 9{,}9375306$$
$$\log \sin 30^\circ = 9{,}6889700$$
$$9{,}6365006$$

$$\log \cos 50^\circ = 9{,}8080675$$
$$\log \cos 40^\circ = 9{,}8842540$$
$$9{,}6923215$$

$$9{,}6365006 = \log \sin 60^\circ . \sin 30^\circ$$
$$9{,}6923215 = \log \cos 50^\circ . \cos 40^\circ$$

Differenz $= 9{,}9441791 = (\cos \frac{1}{2} t)^2$

dividirt durch 2) $9{,}9720896 = \cos \frac{1}{2} t$,

folglich $\frac{1}{2} t = 20^\circ\, 19'\, 54''$ und $t = 40^\circ\, 39'\, 48''$.

Anmerkung. Der Stundenwinkel kann östlich und westlich sein.

31) Wie groß ist der Stundenwinkel der Sonne am längsten Tage zu Hamburg, dessen Polhöhe 53° 33′ ist, wenn die Sonne untergeht?

Auflösung. Hier ist $h = 0$, also wird Formel B

$$0 = \sin p . \sin d + \cos p . \cos d . \cos t,$$

mithin $$t = -\frac{\sin p . \sin d}{\cos p . \cos d} = -\operatorname{tg} p . \operatorname{tg} d,$$

also wieder die obige Formel für den halben Tagebogen.

32) Wie groß ist die augenblickliche Höhe der Sonne zu Hamburg Nachmittags um 4 Uhr in der Frühlings- oder Herbstnachtgleiche?

Antwort. An diesem Tage ist ihre Abweichung gleich Null, also giebt obige Formel (B)

$\sin h = \cos p \,.\, \cos t$ (wegen $\sin d = 0$ und $\cos d = 1$).

Da nun Nachmittags um 4 Uhr die Sonne vom Meridian an 4 Stunden zu ihrem Laufe gebraucht hat,

so ist 24 St. : 4 St. = 360° : t, also t = 60°;

mithin $\sin h = \cos 53^\circ\, 33' \,.\, \cos 60^\circ$.

Man findet $h = 17^\circ\, 16'\, 52''$.

33) Wie groß ist zu Neapel am 8. März 1850 die Mittagshöhe der Sonne, wo ihre Abweichung 4° 55′ 36″ südlich und die Polhöhe von Neapel 40° 51′ 46″,6 beträgt, und zu welcher Zeit geht sie für diesen Ort auf?

Auflösung. Für die Mittagshöhe ist in der Formel

$$\sin h = \sin p \,.\, \sin d + \cos p \,.\, \cos d \,.\, \cos t$$

der Stundenwinkel $t = 0$, also $\cos t = 1$,

folglich $\sin h = \cos (p - d)$, daher $h = 90^\circ - p + d$.

Da aber die Abweichung südlich ist, so wird $h = 90^\circ - p - d$.

Nun ist $p + d = 40^\circ\, 51'\, 46'',6 + 4^\circ\, 55'\, 36'' = 45^\circ\, 47'\, 22'',6$,

daher $h = 90^\circ - 45^\circ\, 47'\, 22'',6 = 44^\circ\, 12'\, 37'',4$.

Für den Aufgang ist $h = 0$, also wird obige Formel, wie wir früher schon haben,

$$\cos t = -\operatorname{tg} p \,.\, \operatorname{tg} d.$$

Da aber d negativ, also $\operatorname{tg} - d = -\operatorname{tg} d$ ist, so folgt

$$\cos t = \operatorname{tg} p \,.\, \operatorname{tg} d,$$

oder $\cos t = \operatorname{tg} 40^\circ\, 51'\, 46'',6 \,.\, \operatorname{tg} 4^\circ\, 55'\, 36''$.

Man findet $t = 85^\circ\, 34'\, 12''$, als den halben Tagebogen. Die Verwandlung dieses Bogenmaßes in Zeitmaß giebt

5 Stunden 26 Min. 17 Sec.

als die Zeit, welche die Sonne von ihrem Aufgange bis zur Culmination gebraucht. Zieht man diese Angabe von 12 Stunden ab, so erhält man

6 Stunden 33 Min. 43 Sec., d. i. um 6 Uhr 33 Min. 43 Sec.

welches die Zeit des Aufganges der Sonne ist.

Anmerkung. Die beiden Theile des Tagebogens der Sonne, vom Aufgang bis zur Culmination, und von da bis zum Untergange, sind streng genommen einander nicht vollkommen gleich, weil während dieser Zeit die Abweichung der Sonne, und zuweilen merklich, sich ändert.

34) Welche Mittagshöhe erreicht die Sonne an dem längsten und kürzesten Tage zu Königsberg, dessen geographische Breite 54° 42′ 50″ beträgt, und um wie viel Uhr geht sie an diesen Tagen dort auf?

Antwort. An dem längsten Tage ist die Höhe h der Sonne, wo ihre Abweichung der Schiefe der Ecliptik ist,

$$h = 90^\circ - p + e = 59^\circ\, 44'\, 40'';$$

an dem kürzesten Tage

$$h = 90^\circ - p - e = 11^\circ\, 49'\, 40'';$$

wo $e = 23^\circ\, 27'\, 30''$ angenommen ist.

Am längsten Tage geht die Sonne auf um 3 Uhr 27 M. 56 S., und am kürzesten um 8 Uhr 32 Min. 7 Sec.

Allgemeine Bemerkungen.

Da die größte Höhe eines Gestirns 90° ist, und doch in der Gleichung $h = 90^\circ - p + d$ der Werth h für kleine p größer als 90° werden kann, so hat man den Ueberschuß über 90° zu nehmen. Dies wird folgende in voriger Aufgabe angeführte Gleichung ausweisen:

$$\sin h = \cos (p - d).$$

Ist nämlich $p = d$ oder $p - d = 0$, also die Polhöhe des Orts der Abweichung des Gestirns gleich, so ist wegen cos 0 die Höhe $h = 90^\circ$, daher gehen alle Sterne, deren Abweichung der Polhöhe des Ortes gleich ist, durch sein Zenith.

Ist d größer als p, so wird $\cos (p - d)$ negativ, d. h. der Stern steht von unserem Zenith nicht mehr nach Süden, sondern an der entgegengesetzten Seite, nach Norden zu, und seine Höhe ist jetzt vom Nordpunkte an zu rechnen.

35) Wie hoch steht die Sonne zu Paramatta, dessen geographische Breite $= 33^\circ\, 48'\, 50''$ südlich ist, an dem längsten und kürzesten Tage, und zu welcher Zeit geht sie dort an genannten Tagen auf?

Auflösung. Da hier p auch negativ ist, so hat man am längsten Tage

$$h = p + e = 57^\circ\ 16'\ 20'',$$

und am kürzesten Tage

$$h = p - e = 10^\circ\ 21'\ 10''.$$

Am längsten Tage geht die Sonne auf um 4 Uhr 52 M. 25 Sec., und am kürzesten um 7 Uhr 4 Min. 25 Sec.

Da die beiden Werthe $p + e$, $p - e$ der Ueberschuß über 90° sind, oder eigentlich vermöge obiger Gleichung

$$\sin h = \cos (90^\circ + p \pm e) = -\cos (p \pm e)$$

ist, so steht die Sonne in beiden Jahreszeiten am nördlichen Himmel, d. h. vom Zenith nördlich.

36) Aus der beobachteten Culminationshöhe der Sonne und noch einer zweiten Höhe derselben am nämlichen Tage nebst der Zwischenzeit, die Polhöhe des Orts und die Abweichung der Sonne zu finden.

Auflösung. Es sei h die Culminationshöhe, h′ die Höhe außer dem Mittage, t die Zwischenzeit in Bogenmaß, so ist für den Mittag, wo $t = 0$ ist,

$$1)\quad \sin h = \sin p . \sin d + \cos p . \cos d = \cos(p - d),$$

also $\quad 2)\quad h = 90^\circ - p + d$, für eine nördliche Polhöhe.

Für die Zeit außer dem Mittag ist

$$3)\quad \sin h' = \sin p . \sin d + \cos p . \cos d . \cos t.$$

h, h', t sind nun bekannte Größen, aus denen p und d bestimmt werden sollen.

Man setze der Kürze wegen $\sin p . \sin d = x$, $\cos p . \cos d = z$, $\sin h = a$, $\sin h = b$, $\cos t = c$, so bestehen folgende Gleichungen:

$$a = x + z; \quad b = x + c\,z.$$

Man eliminire aus beiden x, so folgt

$$z = \frac{a - b}{1 - c}.$$

Dann eliminire man z, so ergiebt sich

$$x = \frac{b - a\,c}{1 - c}.$$

Die Subtraction der letzten Gleichung von der vorhergehenden giebt

$$z - x = \frac{a - b - b + a\,c}{1 - c} = \frac{(1 + c)\,a - 2\,b}{1 - c}.$$

Stellt man die entsprechenden Werthe wieder her, so erhält man

$$\cos p . \cos d - \sin p . \sin d, \text{ d. i.}$$

$$\cos(p + d) = \frac{(1 + \cos t)\sin h - 2\sin h'}{1 - \cos t}$$

$$= \frac{1 + \cos t}{1 - \cos t} . \sin h - \frac{2 \sin h'}{1 - \cos t}.$$

Nun ist bekanntlich $1 + \cos t = 2(\cos \tfrac{1}{2} t)^2$,

und $\quad 1 - \cos t = 2(\sin \tfrac{1}{2} t)^2$,

also $\quad \dfrac{1 + \cos t}{1 - \sin t} = (\cot \tfrac{1}{2} t)^2$,

also $\quad \cos(p + d) = \sin h (\cot \tfrac{1}{2} t)^2 - \dfrac{\sin h'}{(\sin \tfrac{1}{2} t)^2}$.

Da der Ausdruck rechter Haud nicht bequem zur Rechnung mit Logarithmen geeignet ist, so muß man vorerst die absoluten Werthe eines jeden Gliedes besonders bestimmen, dann den Logarithmen des Ausdrucks trigonometrisch einrichten.

Auf diese Weise erhält man p + d, und da aus (1) auch p — d bekannt ist, so findet man p und d, wie nächste Beispiele zeigen.

37) An irgend einem Orte war die Mittagshöhe der Sonne = 55° 50′, um 3 Uhr 12 Min. Nachmittags war ihre Höhe = 40°. Man verlangt die Polhöhe des Orts und die Abweichung der Sonne.

Auflösung. Es ist h = 55° 50′, h′ = 40°, ferner geben 3 St. 12 Min., in Bogenmaß verwandelt, 48° = t, also ist

$$\cos(p + d) = \sin 55^\circ 50' (\cot 24^\circ)^2 - \frac{\sin 40^\circ}{(\sin 24^\circ)^2}.$$

$$\begin{aligned} \log \sin 55^\circ\, 50' &= 9{,}9177194 - 10 \\ \log (\cot 24^\circ)^2 &= 10{,}7028338 - 10 \\ \hline & \ 0{,}6205532 = \log \sin 55^\circ\, 50' . (\cot 24^\circ)^2, \end{aligned}$$

also $\sin 53^\circ\, 50' . (\cot 24^\circ)^2 = 4{,}174$;

$$\begin{aligned} \log \sin 40^\circ &= 9{,}8080675 - 10 \\ \log (\sin 24^\circ)^2 &= 9{,}2186266 - 10 \\ \hline & \ 0{,}5894409 = \log \frac{\sin 40^\circ}{(\sin 24^\circ)^2} \end{aligned}$$

also $\dfrac{\sin 40^\circ}{(\sin 24^\circ)^2} = 3{,}88537$;

folglich $\cos (p + d) = 4{,}174 - 3{,}88537 = 0{,}28863$.

Nun ist $\log 0{,}28863 = 0{,}4603414 - 1$,
mithin $\log \cos (p + d) = 9{,}4603414$,
woraus folgt $p + d = 73^\circ\, 16$.

Aus (2) voriger Aufgabe ist $55^\circ\, 50' = 90^\circ - p + d$, woraus hervorgeht
$$p - d = 34^\circ\, 16'.$$

Aus beiden Resultaten folgt
$p = 53^\circ\, 12'$ als nördliche Polhöhe, und
$d = 19^\circ\, 32'$ als nördliche Declination.

38) Ein Stern culminirte bei einer Höhe von $55^\circ\, 44'$, dann ging er nach 7 Stunden $53\frac{7}{8}$ Min. unter; man fragt nach der geographischen Breite des Orts und nach der Abweichung des Sterns.

Auflösung. Hier ist in obiger Formel $h = 0$, sie reducirt sich dann auf
$$\cos (p + d) = \sin h\, (\cot \tfrac{1}{2} t)^2.$$

Nach gehöriger Ausführung der Rechnung findet man
$p = 53^\circ\, 36'$ als nördliche Polhöhe, und
$d = 19^\circ\, 20'$ als nördliche Abweichung.

39) An einem gewissen Tage war die Höhe der Sonne um 2 Uhr Nachmittags $= 34^\circ\, 46'\, 30''$, und später um 4 Uhr betrug sie $16^\circ\, 5'$; wie groß wird die Polhöhe des Orts und die Abweichung der Sonne sein?

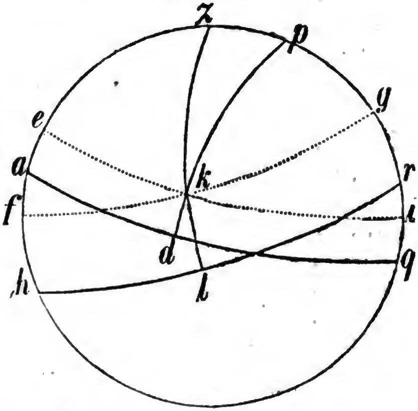
Auflösung. Bezeichnet man die nächste Höhe nach der Culmination mit h', den entsprechenden Stungenwinkel mit t, dann die folgende Höhe mit h'' und den correspondirenden Stundenwinkel mit t', so sind die Gleichungen
$$\sin h' = \sin p . \sin d + \cos p . \cos d . \cos t,$$
$$\sin h'' = \sin p . \sin d + \cos p . \cos d . \cos t'.$$

Da nun h', h'', t und t' bekannte Größen sind, so lassen sich die Werthe p und d auf ähnliche Art wie in Aufgabe 37 entwickeln.

Nach gehöriger Ausführung der Rechnung ergiebt sich
$p = 34^\circ\, 50'$ als nördliche Polhöhe, und
$d = 12^\circ\, 30'$ als südliche Abweichung.

40) Aus dem Stundenwinkel eines Sterns, seiner Abweichung und der Polhöhe des Orts das Azimuth des Sterns und seinen Zenithabstand, ingleichen die Morgen- oder die Abendweite desselben zu finden.

Fig. 192.



Auflösung. Es sei (Fig. 192) a q der Aequator, p sein Pol, h r der Horizont des Orts, h p r q sein Meridian und z das Zenith, so ist p r die Polhöhe und p z das Complement derselben. Ferner sei in k der Stern; dann lege man durch denselben den Bogen z l des Scheitelkreises und den Bogen p d des Abweichungkreises, so ist k z des Sterns Zenithabstand und k d seine Abweichung; dann ist a p d der Stundenwinkel und h l oder l r das Azimuth.

Es ist also in dem sphärischen Dreieck k p z gegeben die Seite p k $= 90^\circ - d$, die Seite $p z = 90^\circ - p$, und der Winkel $z p k = t$; und es soll gesucht werden der Winkel k z p, dessen Maß der Bogen l r als das Azimuth ist.

Bezeichnen wir den Winkel k z p oder das Azimuth mit m und den Winkel z k p mit w, so ist nach den Neper'schen Analogieen

$$1)\ \left\{\begin{aligned} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(m+w) &= \frac{\cos \frac{1}{2}(p-d)}{\cos \frac{1}{2}(180^\circ - p - d)} \cdot \cot \tfrac{1}{2} t \\ &= \frac{\cos \frac{1}{2}(p-d)}{\sin \frac{1}{2}(p+d)} \cdot \cot \tfrac{1}{2} t \\ \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(m-w) &= \frac{\sin \frac{1}{2}(p-d)}{\sin \frac{1}{2}(180^\circ - p - d)} \cdot \cot \tfrac{1}{2} t \\ &= \frac{\sin \frac{1}{2}(p-d)}{\cos \frac{1}{2}(p+d)} \cdot \cot \tfrac{1}{2} t, \end{aligned}\right.$$

und für den Zenithabstand k z, welcher z heißen soll, ist

$$2)\quad \sin \tfrac{1}{2} z = \frac{\sin \frac{1}{2}(p-d)}{\sin \frac{1}{2}(m-w)} \cdot \cos \tfrac{1}{2} t.$$

Nehmen wir die Ergänzung des Azimuths zu 90 Grad, so erhalten wir die Morgen- oder die Abendweite des Sterns, je nachdem sein Azimuth östlich oder westlich ist. Bezeichnet man die Morgen- oder die Abendweite mit n, so erhält man, wenn das Azimuth m kleiner als 90 Grad ist, $n = 90^\circ - m$, und n ist vom Ost- oder Westpunkte südlich; wenn aber m größer als 90 Grad ist, so hat man $n = m - 90^\circ$, und n ist vom Ost- oder Westpunkte nördlich.

Anmerkung. Den Winkel w am Himmelskörper nennen Einige den Variationswinkel, Andere den parallactischen Winkel.

41) Aus der Polhöhe, dem Azimuth und der Abweichung eines Gestirns seinen Zenithabstand nebst dem Stundenwinkel zu finden.

Auflösung. Im Dreieck pkz (Fig. 192) sind die beiden Seiten pk, pz nebst dem anliegenden Winkel kzp gegeben, und es soll gesucht werden die dritte Seite kz nebst dem Gegenwinkel zpk.

Man suche zuerst den Winkel $kzp = w$ nach der Formel

$$\sin A = \frac{\sin a \sin B}{\sin b},$$

welche hier wird

$$1)\quad \sin w = \frac{\sin(90^\circ - p) \,.\, \sin m}{\sin(90^\circ - d)} = \frac{\cos p \sin m}{\cos d}.$$

Alsdann bestimme man die dritte Seite nach einer der Neper'schen Analogieen

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(a+b) = \frac{\cos \frac{1}{2}(A-B)}{\cos \frac{1}{2}(A+B)} \,.\, \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} c,$$

woraus folgt

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} c = \frac{\cos \frac{1}{2}(A+B)}{\cos \frac{1}{2}(A-B)} \,.\, \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(a+b),$$

oder, wenn die entsprechenden Bezeichnungen gebraucht werden,

$$2)\quad \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} z = \frac{\cos \frac{1}{2}(m+w)}{\cos \frac{1}{2}(m-w)} \,.\, \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(180^\circ - p - d)$$

$$= \frac{\cos \frac{1}{2}(m+w)}{\cos \frac{1}{2}(m-w)} \,.\, \cot \tfrac{1}{2}(p+d).$$

Da nun die drei Seiten bekannt sind, so kann man den Stundenwinkel t nach den obigen Formeln (Seite 217) suchen, also

$$\cos \tfrac{1}{2} t = \sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2}(180^\circ + z - p - d) \,.\, \sin \frac{1}{2}(180^\circ - p - d - z)}{\sin(90^\circ - p) \sin(90^\circ - d)}}$$

$$\sin \tfrac{1}{2} t = \sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2}(z + p - d) \sin \frac{1}{2}(z + d - p)}{\sin(90^\circ - p) \sin(90^\circ - d)}},$$

und nach gehöriger Abkürzung

$$3)\quad \cos \tfrac{1}{2} t = \sqrt{\frac{-\cos \frac{1}{2}(z - p - d) \,.\, \cos \frac{1}{2}(p + d + z)}{\cos p \,.\, \cos d}},$$

4) $\sin \frac{1}{2} t = \sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2}(z+p-d) \cdot \sin \frac{1}{2}(z+d-p)}{\cos p \cdot \cos d}}$.

Anmerkung. Die Formel 3 stimmt mit der Obigen (Aufg. 30) überein, wenn man $\sin z = 90° - h$ setzt.

42) Aus der Polhöhe eines Ortes, der Abweichung und dem Zenithabstande eines Gestirns das Azimuth zu finden.

Auflösung. In dem Dreiecke kpz (Fig. 192) sind, wenn die übrigen Bezeichnungen der beiden vorhergehenden Aufgaben beibehalten werden, die drei Seiten gegeben, und es soll der Winkel kzp gefunden werden, dadurch erhalten wir (nach S. 220) folgende Formeln:

$$\cos \tfrac{1}{2} m = \sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2}(p+z-d) \cdot \cos \frac{1}{2}(p+z+d)}{\cos p \cdot \sin z}},$$

$$\sin \tfrac{1}{2} m = \sqrt{\frac{\cos \frac{1}{2}(p+d-z) \cdot \sin \frac{1}{2}(z+d-p)}{\cos p \cdot \sin z}}.$$

43) Zu Palermo wurde am 21. März 1793 das Azimuth und der Zenithabstand des Procyon in dem Augenblicke gesucht, als der Stundenwinkel 38° 22′ 3″ und die Abweichung dieses Sterns 5° 44′ 11″ nördlich betrug. Was für Resultate werden sich ergeben, da die Polhöhe von Palermo 38° 6′ 44″ ist? (Vergl. Aufg. 40.)

Auflösung. Es ist

$$\tfrac{1}{2}(p-d) = 16°\ 11'\ 16'',5,$$

$$\tfrac{1}{2}(p+d) = 21°\ 55'\ 27'',5, \quad \tfrac{1}{2} t = 19°\ 11'\ 1'',5,$$

also

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(m+w) = \frac{\cos 16°\ 11'\ 16'',5}{\sin 21°\ 55'\ 27'',5} \cdot \cot 19°\ 11'\ 1'',5,$$

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(m-w) = \frac{\sin 16°\ 11'\ 16'',5}{\cos 21°\ 55'\ 27'',5} \cdot \cot 19°\ 11'\ 1'',5.$$

$$\begin{aligned}
\log \cos \tfrac{1}{2}(p-d) &= 9{,}9824307 \\
\log \cot \tfrac{1}{2} t &= 10{,}4585220 \\
& \overline{10{,}4409527} \\
\log \sin \tfrac{1}{2}(p+d) &= 9{,}5721526 \\
& \overline{10{,}8688001} = \log \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(m+w),
\end{aligned}$$

$$\tfrac{1}{2}(m+w) = 82'\ 17'\ 47'';$$

$$\begin{aligned}
\log \sin \tfrac{1}{2}(p-d) &= 9{,}4452750 \\
\log \cot \tfrac{1}{2} t &= 10{,}4585220 \\
& \overline{9{,}9037970} \\
\log \cos \tfrac{1}{2}(p+d) &= 9{,}9673973 \\
& \overline{9{,}9362997} = \log \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(m-w),
\end{aligned}$$

$$\tfrac{1}{2}(m-w) = 40°\ 49'\ 10''.$$

$$\text{Also}\quad \tfrac{1}{2}(m+w) = 82^\circ\ 17'\ 47''$$
$$\tfrac{1}{2}(m-w) = 40^\circ\ 49'\ 10''$$

$$\text{Summe oder Azimuth} = 123^\circ\ 6'\ 57''$$
$$\text{Differenz od. Winkel } w = 41^\circ\ 28'\ 37''$$

$$\text{Differenz beider Winkel} = 81^\circ\ 38'\ 20''$$
$$\text{Hälfte} = 40^\circ\ 49'\ 10''$$

Ferner ist $\sin \tfrac{1}{2} z = \dfrac{\sin 16^\circ 11' 16'',5}{\sin 40^\circ 54' 10''} \cdot \cos 19^\circ 11' 1'',5.$

$$\log \sin 16^\circ 11' 16'',5 = 9{,}4452750$$
$$\log \cos 19^\circ 11' 1'',5 = 9{,}9751880$$
$$9{,}4204630$$
$$\log \sin 40^\circ 49' 10'' = 9{,}8153635$$
$$9{,}6050995 = \log \sin \tfrac{1}{2} z,$$

$$\tfrac{1}{2} z = 23^\circ\ 45'\ 14'', \qquad z = 47^\circ\ 30'\ 28''.$$

44) Am 21. März 1793 wurde zu Palermo ein Azimuth des Procyon, dessen Abweichung 5° 44′ 11″ nördlich war, zu 142° 51′ 39″ beobachtet. Man verlangt die Höhe des Sterns über dem Horizonte. (Vergl. Aufg. 41.)

Auflösung. Es ist nach der ersteren der dort angeführten Formeln

$$\sin w = \frac{\cos 38^\circ 6' 44'' .\ \sin 142^\circ 51' 39''}{\cos 5^\circ 44' 11''}$$
$$= \frac{\cos 38^\circ 6' 44'' .\ \sin 37^\circ 8' 21''}{\cos 5^\circ 44' 11''}.$$

Man findet daraus $w = 28^\circ\ 31'\ 3''$.

Nun ist $\tfrac{1}{2}(m+w) = 85^\circ 41' 21''$,

$\tfrac{1}{2}(m-w) = 57^\circ 10' 18''$, $\tfrac{1}{2}(p+d) = 21^\circ 55' 27'',5$;

daher giebt die zweite Formel

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} z = \frac{\cos 85^\circ 41' 21''}{\cos 57^\circ 10' 18''} \cdot \cot 21^\circ 55' 27'',5.$$

Daraus erhalten wir $z = 38^\circ 0' 57''$ als den Zenithabstand, und $h = 90^\circ - 38^\circ 0' 57'' = 51^\circ 59' 3''$ als die Höhe.

Anmerkung. Wenn $p = d$, wo also die Polhöhe des Orts der Abweichung des Gestirns gleich ist, so erhalten wir für m, w und z unmögliche Werthe.

45) Aus dem Zenithabstand oder auch der Höhe, dem Azimuth nebst dem Stundenwinkel eines Gestirns seine Abweichung und die Polhöhe des Orts zu finden.

Auflösung. In dem sphärischen Dreieck $p\,k\,z$ (Fig. 192) sind die beiden Winkel $k\,z\,p = m$ $z\,p\,k = t$ nebst der Seite $z\,k = z = 90^\circ - h$, die dem Stundenwinkel t gegenüberliegt, gegeben, und es

soll die Zwischenseite $zp = 90° - p$, und die dem Azimuth $kzp = m$ gegenüberliegende Seite $pk = 90° - d$ gefunden werden.

Man suche zuerst die Seite $pk = 90° - d$ nach der Proportion,

$$\sin m : \sin t = pk : \sin z,$$

d. i. $\sin m : \sin t = \sin (90° - d) : \sin z$, und wegen $\sin (90° - d) = \cos d$ folgt

$$1) \quad \cos d = \frac{\sin z \,.\, \sin m}{\sin t} = \frac{\cos h \,.\, \sin m}{\sin t}.$$

Da die Abweichung d nie über 90 Grad werden kann, so läßt sich ihr Werth immer mit Bestimmtheit finden.

Da nun d bestimmt ist, so findet man $pz = 90° - p$ als die Zwischenseite der bekannten Größen m und t nebst ihren bekannten Gegenseiten $kz = z = 90° - h$ und $pk = 90° - d$, durch die Gleichung

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} (90° - p) = \frac{\cos \frac{1}{2} (t + m)}{\cos \frac{1}{2} (t - m)} \,.\, \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} (180° - h - d)$$

oder

$$2) \quad \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} (90° - p) = \frac{\cos \frac{1}{2} (t + m)}{\cos \frac{1}{2} (t - m)} \,.\, \cot \tfrac{1}{2} (h + d)$$

und

$$3) \quad \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} (90° - p) = \frac{\sin \frac{1}{2} (t + m)}{\sin \frac{1}{2} (t - m)} \,.\, \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} (h - d).$$

46) Morgens um 4 Uhr $6\frac{1}{3}$ Minuten ging die Sonne auf und ihre Höhe im Osten war 34° 17′ 15″; man sucht die Polhöhe des Orts und die Declination der Sonne.

Auflösung. Da die Sonne gerade in Osten stand, so war ihr Azimuth = 90° und ihr Stundenwinkel 12 St. — (4 St. $6\frac{1}{3}$ Minut.) = 7 St. 53 M. 40 Sec.

Die Verwandlung dieser Zeit im Bogenmaß giebt $t = 118° 5'$.

Die erste Formel vorhergehender Aufgabe liefert, da $\sin m = 1$ ist,

$$\cos d = \frac{\cos 34° 17' 15''}{\sin 118° 5'} = \frac{\cos 34° 17'' 15'}{\sin 61° 55'}.$$

Man findet hieraus $d = 20° 32'$ als nördliche Abweichung.

Die dritte Formel wird wegen

$\frac{1}{2} (h - d) = 6° 52' 38''$, $\frac{1}{2} (t + m) = 104° 2' 30''$,

$\frac{1}{2} (t - m) = 14° 2' 30''$.

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} (90° - p) = \frac{\sin 75° 57' 30''}{\sin 14° 2' 30''} \,.\, \operatorname{tg} 6° 52' 38''.$$

Die gehörige Ausführung der Rechnung giebt

$$\tfrac{1}{2} (90° - p) = 25° 44' 48''$$

$$90° - p = 51° 29' 36''$$

$p = 38° 30' 24''$ als nördliche Polhöhe.

47) Man verlangt für Hamburg, dessen Polhöhe 53° 33′ beträgt, die Morgenweite der Sonne an dem längsten Tage, ingleichen, wie hoch sie an demselben in Osten steht.

Auflösung. Zuerst muß der Stundenwinkel berechnet werden, welcher bekanntlich vermittelst der Formel $\cos t = - \operatorname{tg} p \,.\, \operatorname{tg} d$ gefunden wird.

Da nun an diesem Tage die Abweichung der Sonne gleich der Schiefe der Ecliptik, also $= 23° 27' 30''$ ist, so findet man $t = 125° 58' 51'$.

Alsdann ist aus den Formeln in Aufgabe 40 das Azimuth zu bestimmen.

Aus denselben findet man

$$\tfrac{1}{2}(m + w) = 38° 20'$$
$$\tfrac{1}{2}(m - w) = 9° 35' 50''$$

Summe oder Azimuth $m = 47° 55' 50''$
Differenz oder Variationswinkel $w = 28° 44' 10''$

und die Morgenweite $n = 90° - m = 42° 4' 10''$ nördlich,
eigentliches Azimuth $m = 90° + n = 132° 9' 10''$.

Um die Höhe der Sonne in Osten zu finden, nehme man eine der Formeln in Aufgabe 45 zu Hülfe, die man nur umzukehren, und für $\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(h - d)$ zu bestimmen braucht, die dritte wird demnach

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(h - d) = \frac{\sin \tfrac{1}{2}(t - m)}{\sin \tfrac{1}{2}(t + m)} \,.\, \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(90° - p),$$

wo aber hier das Azimuth für die östliche Höhe der Sonne = 90 Grad zu setzen ist.

Wir erhalten mithin nach gehöriger Reduction

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(h - d) = \frac{\sin 17° 54' 25''}{\sin 72° 53' 5''} \,.\, \operatorname{tg} 17° 13' 30'',$$

$$\tfrac{1}{2}(h - d) = 5° 41' 45'',6$$
$$h - d = 11° 23' 31''$$
$$h = 11° 23' 31'' + 23° 27' 30'' = 34° 51'.$$

48) Man soll die Morgenweite der Sonne am kürzesten Tage für Hamburg bestimmen.

Auflösung. Da an diesem Tage die Abweichung der Sonne der vorigen gleich aber entgegengesetzt ist, so wird in unseren Formeln d negativ, wir erhalten daher für den Stundenwinkel $t = 54° 1' 9''$.

Man erhält aus denselben Formeln

$$\tfrac{1}{2}(m + w) = 80° 24' 17''$$
$$\tfrac{1}{2}(m - w) = 51° 40' 12''$$

Summe oder Azimuth $m = 132° 4' 29'$
Differenz oder Winkel $w = 28° 44' 5''$

die Morgenweite $n = m - 90° = 42° 4' 29''$ südlich,
eigentliches Azimuth $m = 90° - n = 47° 55' 31''$.

49) Man soll für einen Ort auf dem nördlichen Wendekreise, dessen Polhöhe also gleich der Schiefe der Ecliptik ist, die Morgenweite an dem längsten Tage, ingleichen die östliche Höhe der Sonne finden.

Antwort. Die Morgenweite ist $= 25^\circ\,27'\,40''$ und die östliche Höhe der Sonne $= 46^\circ\,45'\,22''$ nahe.

50) An einem Orte ging die Sonne von Westen gegen Norden 35° um 7 Uhr 56 Minuten unter, man sucht die Polhöhe des Orts und die Abweichung der Sonne.

Antwort. 20° 31′ nördliche Abweichung, 52° 20′ nördliche Polhöhe.

Die gegebenen Größen sind hier die Abendweite, aus welcher auch das Azimuth bekannt ist, dann der Stundenwinkel.

Da die Sonne im Horizonte steht, so ist ihr Zenithabstand = 90 Grad. Wenn man sich nun (Fig. 192) statt h r unter f g den Horizont, jedoch auch als größten vorstellt, so ist in dem Dreieck k z p

$$\sin kzp : zpk = \sin kp : kz$$

oder

$$\sin m : \sin t = \sin (90^\circ - d) : \sin 90^\circ,$$

und wegen $m = 90^\circ + 35^\circ = 125^\circ$, $t = 119^\circ$ und $\sin 90^\circ = 1$, folgt

$$\sin (90^\circ - d) = \frac{\sin 125^\circ}{\sin 119^\circ} = \frac{\sin 55^\circ}{\sin 61^\circ}.$$

Die Polhöhe p findet man nach Aufgabe 45.

51) Als ein Stern culminirte, war seine Höhe über dem Horizonte 63° 20′, und 4 Stunden 36¾ Minuten später stand er gerade in Westen. Wie groß ist die Polhöhe des Orts und die Abweichung des Sterns?

Antwort. Nördliche Abweichung = 22° 3′, nördliche Polhöhe = 48° 43′.

Da hier das Azimuth 90° hat, so ist das Dreieck p k z (Fig. 192) rechtwinkelig, in welchem der Stundenwinkel z p k nebst der Seite z k $= 90^\circ - h$ gegeben sind.

52) An einem Orte, wo die nördliche Polhöhe gleich der südlichen Abweichung der Sonne war, sahe man diese um 5½ Uhr untergehen. Man sucht die Polhöhe des Orts.

Auflösung. Die bekannte Formel

$$\cos t = -\operatorname{tg} p \,.\, \operatorname{tg} d$$

verwandelt sich, da d negativ und gleich p werden soll, in

$$\cos t = (\operatorname{tg} p)^2,$$

also

$$\operatorname{tg} p = \sqrt{\cos t}.$$

Nun geben 5½ Stunden in Bogenmaß ausgedrückt 82° 30′, also

$$\operatorname{tg} p = \sqrt{\cos 82^\circ\,30'}.$$

$$\log \cos 82^\circ\,30' = 9{,}1156977 = \log (\operatorname{tg} p)^2,$$

$$2)\quad 9{,}5578488 = \log \operatorname{tg} p,$$

$p = 19^\circ\,52'$ nördliche Polhöhe, gleich der südlichen Abweichung.

53) Zur Zeit, als die südliche Abweichung der Sonne gleich der nördlichen Polhöhe des Ortes war, sah man daselbst die Sonne in Westen

25° nach Süden in ihrem Untergange. Man fragt nach der Polhöhe des Ortes.

Antwort. 22° 55′.

54) Aus der Polhöhe eines Ortes und der Morgenweite eines Gestirns dessen schiefe Aufsteigung oder Ascensional-Differenz zu finden.

Auflösung. Es sei (Fig. 191) a q der Aequator, p der Pol, h r der Horizont und h p r q der Meridian des Ortes und c der Ostpunkt; dann sei m ein Gestirn, welches sich in dem Parallelkreise f g bewege. Ist nun das Gestirn in m, so liegt es im Horizonte, und c m ist alsdann seine Morgenweite. Man fälle nun von m auf den Aequator das Perpendikel m n, so ist c n die schiefe Aufsteigung des Gestirns. Ferner ist $rp = p$ die Polhöhe und q r ihr Complement oder die Aequatorhöhe; der Bogen $rq = 90° - p$ ist aber auch das Maß des sphärischen Winkels $rcq = ncm$, weil c r, c q Quadranten sind.

Nun ist in dem rechtwinkeligen sphärischen Dreiecke n c m, wo der rechte Winkel bei n ist, die Hypotenuse c m nebst dem anliegenden Winkel bei c gegeben, daher ist aus oben gezeigten Gründen

$$\cos ncm = \operatorname{tg} cm \,.\, \operatorname{tg} cn,$$

oder wegen $ncm = 90° - p$,

$$\cos (90° - p) = \operatorname{tg} cm \,.\, \operatorname{tg} cn.$$

Bezeichnen wir die Morgenweite c m mit n, die schiefe Aufsteigung c n mit s, und beachten, daß $\cos (90° - p) = \sin p$ ist, so findet die Gleichung statt

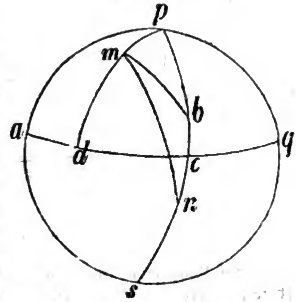
$$\sin p = \operatorname{tg} n \,.\, \operatorname{tg} s, \quad \text{also } \operatorname{tg} s = \frac{\sin p}{\operatorname{tg} n}.$$

Für $p = 0$ wird auch $s = 0$, d. h. für jeden Ort auf dem Aequator giebt es keine schiefe Aufsteigung oder die Gestirne steigen alle senkrecht auf und ab.

55) Aus der geographischen Breite zweier Orte auf der Erdoberfläche nebst ihrem Längenunterschiede ihre kürzeste Entfernung von einander d. h. den Bogen eines größten Kreises der Erdkugel zwischen ihnen in geographischen Meilen zu finden.

Die kürzeste Entfernung wäre eigentlich die Sehne dieses Bogens; allein von dieser ist hier nicht die Rede.

Fig. 193.



Auflösung. Es stelle (Fig. 193) die Erdkugel vor; p sei der Nordpol, s der Südpol und a q der Aequator, dann sollen m und b die beiden Orte sein, deren Entfernung zu suchen ist. Man lege nun durch die beiden Orte vom Pol p die Bogen p d, p c größter Kreise, welche Meridian-Quadranten sind, so ist der Bogen d m die geographische Breite des Ortes m, und der Bogen c b die des Ortes b. Ferner sei p a s ein willkürlich angenommener Meridian, von welchem die Längen von a nach q gezählt werden sollen, so ist a d die geographische Länge des Ortes m und a c die des

Ortes b, also der Bogen d c der Längenunterschied beider Orte. Legt man endlich durch die beiden Orte den Bogen m b eines größten Kreises der Erde, so ist derselbe die gesuchte Entfernung.

Unsere Aufgabe läßt sich sonach auf die Berechnung des sphärischen Dreiecks p m b zurückführen, in welchem zwei Seiten p m und p b nebst dem Zwischenwinkel m p b gegeben sind, und die Gegenseite m b gesucht werden soll. Denn es ist

$$p\,m = p\,d - d\,m = 90^\circ - \text{Breite des Ortes } m,$$
$$p\,b = p\,c - b\,c = 90^\circ - \text{Breite des Ortes } b.$$

Ferner besteht das Maß des sphärischen Winkels m p b in dem Bogen d c des Aequators oder in dem Längenunterschied a c — a d.

Bezeichnen wir die größere Breite d m mit b, die kleinere c b mit b', dann die größere Länge a c mit l und die kleinere a d mit l, so ist wegen $p\,m = 90^\circ - b$, $p\,c = 90^\circ - b'$, $d\,c = l - l'$ nach den Neper'schen Analogieen, wenn A und B nach derselben Ordnung die Gegenwinkel der Seiten p b und p m sind,

$$\tang \tfrac{1}{2}(A + B) = \frac{\cos \frac{1}{2}(b - b')}{\cos \frac{1}{2}(180^\circ - b - b')} \cdot \cot \tfrac{1}{2}(l - l'),$$

$$\tang \tfrac{1}{2}(A - B) = \frac{\sin \frac{1}{2}(b - b')}{\sin \frac{1}{2}(180^\circ - b - b')} \cdot \cot \tfrac{1}{2}(l - l').$$

Ferner zur Bestimmung der Seite m b ist

$$\sin \tfrac{1}{2}\, m\,b = \frac{\sin \frac{1}{2}(b - b')}{\sin \frac{1}{2}(A - B)} \cdot \cos \tfrac{1}{2}(l - l').$$

Die beiden ersteren Formeln gelten für den Fall, wo die beiden Orte, deren Entfernung gesucht werden soll, in derselben Halbkugel liegen. Wenn aber der eine Ort m in der nördlichen, der andere n in der südlichen Halbkugel liegt, so hat man jetzt das Dreieck p m n zu betrachten; es ändert sich dann in obigen Formeln zwar der Ausdruck für den Unterschied der Längen nicht, wohl aber der für den Unterschied und die Summe der Breiten. Denn die geographische Breite des Ortes n ist = b n und südlich, daher sind im Dreieck p m n, wenn c n mit b und d m mit b' bezeichnet wird, die Seiten

$$p\,m = 90^\circ - b', \text{ und } p\,n = p\,c + c\,n = 90^\circ + b,$$

demnach $p\,n - p\,m = 90^\circ + b - 90^\circ + b' = b + b'$,

und $p\,n + p\,m = 90^\circ + b + 90^\circ - b' = 180^\circ + b - b'$.

Obige Formeln gehen sonach in folgende über:

$$\text{tg} \tfrac{1}{2}(A + B) = \frac{\cos \frac{1}{2}(b + b')}{\cos \frac{1}{2}(180^\circ + b - b')} \cdot \cot \tfrac{1}{2}(l - l'),$$

$$\text{tg} \tfrac{1}{2}(A - B) = \frac{\sin \frac{1}{2}(b + b')}{\sin \frac{1}{2}(180^\circ + b - b')} \cdot \cot \tfrac{1}{2}(l - l').$$

56) Wie weit ist Gotha von Hamburg entfernt, wenn die geographische Breite Hamburgs 53° 33' 5" und seine geographische Länge

27° 38′ 9″, dann die Breite Gotha's 50° 56′ 5″ und seine Länge 28° 23′ 43″,5 beträgt?

Die Längen sind östlich von Ferro gerechnet.

Auflösung. Es ist $b = 53° 33' 5''$, $b' = 50° 56' 5''$, $l = 28° 23' 43'',5$, $l' = 27° 38' 9''$, also

$$\tfrac{1}{2}(b - b') = 1° 18' 30'', \ \tfrac{1}{2}(180° - b - b') = 37° 45' 25'',$$
$$\tfrac{1}{2}(l - l') = 22' 47''.$$

Also

$$\begin{array}{lrl}
\log\cos\tfrac{1}{2}(b - b') & = & 9{,}9998868 \\
\log\cot\tfrac{1}{2}(l - l') & = & 12{,}1831707 \\
\hline
 & & 12{,}1830575 \\
\log\cos\tfrac{1}{2}(180° - b - b') & = & 9{,}8980468 \\
\hline
 & & 12{,}2850107 = \log tg\tfrac{1}{2}(A + B),
\end{array}$$

$$\tfrac{1}{2}(A + B) = 89° 42' 10''.$$

$$\begin{array}{lrl}
\log\sin\tfrac{1}{2}(b - b') & = & 8{,}3585580 \\
\log\cot\tfrac{1}{2}(l - l') & = & 12{,}1831707 \\
\hline
 & & 10{,}5417287 \\
\log\sin\tfrac{1}{2}(180° - b - b') & = & 9{,}7869736 \\
\hline
 & & 10{,}7547551 = \log tg\tfrac{1}{2}(A - B),
\end{array}$$

$$\tfrac{1}{2}(A - B) = 80° 1' 27''.$$

Also
$$\begin{array}{lrl}
\tfrac{1}{2}(A + B) & = & 89° 42' 10'' \\
\tfrac{1}{2}(A - B) & = & 80° \ 1' 27'' \\
\hline
\text{Summe} & = & 169° 43' 37'' = A. \\
\text{Unterschied} & = & 9° 40' 43'' = B.
\end{array}$$

Ferner ist wegen $\tfrac{1}{2}(A - B) = 80' 1' 27''$

$$\sin\tfrac{1}{2} b m = \frac{\sin 1° 18' 30''}{\sin 89° 1' 27''} . \cos 22' 47''.$$

Also
$$\begin{array}{lrl}
\log\sin 1° 18' 30'' & = & 8{,}3585580 \\
\log\cos 22' 47'' & = & 9{,}9999905 \\
\hline
 & & 8{,}3585485 \\
\log\sin 80° 1' 27'' & = & 9{,}9933837 \\
\hline
 & & 8{,}3651648 = \log\sin\tfrac{1}{2} b m,
\end{array}$$

folglich $\tfrac{1}{2} b m = 1° 19' 42'',2$, und $b m = 2° 38' 24'',4$,

Wird dieses Bogenmaß auf deutsche Meilen reducirt, von denen 15 auf einen Grad des Aequators gehen, so erhalten wir $39\tfrac{5}{8}$ Meilen sehr nahe.

57) Die geographische Breite von Bonn ist = 50° 43′ 45″ und dessen Länge = 24° 45′ 45″; die Breite von Paramatta = 33° 48′ 50″ südlich (eigentlich nur 33° 48′ 49″,8), und dessen Länge = 168° 41′ 12″. Wie weit sind beide Städte von einander entfernt?

Auflösung. Da die Breite von Paramatta südlich ist, so muß für diesen Fall letztere Formel angewendet werden. Es ist also

$\frac{1}{2}(b+b') = 42^\circ\, 16'\, 17'',5$, $\frac{1}{2}(180^\circ + b - b') = 81^\circ\, 32'\, 32'',5$,

wo $b' = 50^\circ\, 43'\, 45''$ ist, $\frac{1}{2}(l - l) = 71^\circ\, 57'\, 43'',5$.

$$
\begin{aligned}
\log\cos\tfrac{1}{2}(b+b') &= 9{,}8692111 \\
\log\cot\tfrac{1}{2}(l-l') &= \underline{9{,}5127531} \\
& 9{,}3819642 \\
\log\cos\tfrac{1}{2}(180^\circ+b-b') &= \underline{9{,}1675479} \\
& 19{,}2144163 = \log tg\tfrac{1}{2}(A+B),
\end{aligned}
$$

$$\tfrac{1}{2}(A+B) = 58^\circ\; 36'\; 7''.$$

$$
\begin{aligned}
\log\sin\tfrac{1}{2}(b+b') &= 9{,}8277858 \\
\log\cot\tfrac{1}{2}(l-l) &= \underline{9{,}5127531} \\
& 9{,}3405389 \\
\log\sin\tfrac{1}{2}(180^\circ+b-b') &= \underline{9{,}9952544} \\
& 9{,}3452845 = \log tg\tfrac{1}{2}(A-B),
\end{aligned}
$$

$$\tfrac{1}{2}(A-B) = 12^\circ\; 29'\; 13''.$$

Daraus folgt $A = 70^\circ\; 5'\; 20''$, $B = 46^\circ\; 6'\; 47''$

und $\frac{1}{2}(A-B) = 12^\circ\; 29'\; 16'',5$.

Alsdann ist $\sin\frac{1}{2}mn = \dfrac{\sin 42^\circ\, 16'\, 17'',5}{\sin 12^\circ\, 29'\, 16'',5}.\cos 71^\circ\, 57'\, 43''$,

$$
\begin{aligned}
\log\sin 42^\circ\, 16'\, 17'',5 &= 9{,}8277858 \\
\log\cos 71^\circ\, 57'\, 43'',5 &= \underline{9{,}4911173} \\
& 9{,}3189031 \\
\log\sin 12^\circ\, 29'\, 16'',5 &= \underline{9{,}3349233} \\
& 9{,}9839798 = \log\sin\tfrac{1}{2}mn,
\end{aligned}
$$

$\frac{1}{2}mn = 74^\circ\, 32'\, 59''$, $mn = 149^\circ\, 5'\, 58''$, wofür man $149^\circ\, 6'$ setzen kann.

Die Reduction dieses Bogens auf geographische Meilen giebt 2236¼ ganze Meilen.

---

58) Als an irgend einem Tage die Tageslänge 15 Stunden 44 Min. war, sah man die Sonne 3 Stunden 7 Minuten nach ihrem Aufgange gerade in Osten. Es soll die Polhöhe des Ortes und die nördliche Abweichung der Sonne gefunden werden.

Auflösung. Die Hälfte der Tageslänge, nämlich 7 Stunden 52 Minuten, giebt in Bogenmaß ausgedrückt, den Stundenwinkel für den Aufgang der Sonne, also $t = 118^\circ$; dann der Abzug der 3 Stunden 7 Minuten von 7 Stunden 52 Min., d. i. 4 Stunden 45 Min., ist in Bogenmaß der Stundenwinkel l' für die Höhe h der Sonne in Osten; es ist demnach $l' = 71^\circ\; 15'$.

Zu der Auflösung unserer Aufgabe sind nun folgende Gleichungen erforderlich:

Für die Sonne im Horizonte ist

$$\cos t = -\operatorname{tg} p \,.\, \operatorname{tg} d,$$

oder wegen $\operatorname{tg} p \,.\, \operatorname{tg} d = \frac{\sin p \,.\, \sin d}{\cos p \,.\, \cos d}$,

$$1) \quad \cos t \,.\, \cos p \,.\, \cos d = -\sin p \,\sin d;$$

und für die Sonne in ihrer östlichen Höhe

$$2) \quad \sin h = \sin p \,.\, \sin d + \cos p \,\cos d \,\cos t'.$$

Da das Azimuth der Sonne in Osten = 90 Grad, also das sphärische Dreieck k z p (Fig. 192) rechtwinkelig ist, so hat man in demselben, wenn die Bezeichnungen noch dieselben wie in den früheren Aufgaben bleiben,

$$\cos pk = \cos z \,.\, \cos zp$$

d. i. $\cos (90^\circ - d) = \cos (90^\circ - h) \,.\, \cos (90^\circ - p)$,

oder 3) $\sin d = \sin h \,\sin p$.

t und t' sind bekannte, hingegen h, p und d unbekannte Größen, die aus den drei Gleichungen zu ermitteln sind.

Man eliminire nun aus 2 und 3 sin h, so folgt

$$\sin d = \sin d \,(\sin p)^2 + \sin p \,.\, \cos p \,\cos d \,\cos t'.$$

Nun ist aus (1) $\cos p \,\cos d = -\frac{\sin p \,\sin d}{\cos t}$.

Setzt man diesen Werth rechter Hand in letzte Gleichung, so erhält man

$$\sin d = \sin d \,(\sin p)^2 - \frac{\sin d \,\cos t' (\sin p)^2}{\cos t}.$$

Multiplicirt man durchgängig mit cos t nnd dividirt durch sin d, so folgt

$$\cos t = \cos t \,(\sin p)^2 - \cos t' \,(\sin p)^2,$$

oder $\cos t = (\cos t - \cos t') \,(\sin p)^2$,

daher $\sin p = \sqrt{\frac{\cos t}{\cos t - \cos t'}} = \sqrt{\frac{\cos t}{2 \sin \frac{1}{2} (t + t') \sin \frac{1}{2} (t - t')}}$

und nach Einsetzung der obigen numerischen Werthe

$$\sin p = \sqrt{\frac{\cos 118^\circ}{\cos 118^\circ - \cos 71^\circ 15'}} = \sqrt{\frac{-\cos 62^\circ}{-\cos 62^\circ - \cos 71^\circ 15'}}$$

$$= \sqrt{\frac{\cos 62^\circ}{\cos 62^\circ + \cos 71^\circ 15'}};$$

$$\log \cos 62^\circ = 9{,}6716093 - 10 = 0{,}6716093 - 1$$
$$\cos 62^\circ = 0{,}4694715,$$
$$\log \cos 71^\circ 15' = 9{,}5070992 - 10 = 0{,}5070992 - 1$$
$$\cos 71^\circ 15' = 0{,}3214395$$
$$\cos 62^\circ + \cos 71^\circ 15' = 0{,}7909110,$$

also $\sin p = \sqrt{\frac{4694715}{7909110}}$

$$\log \sin p = \tfrac{1}{2} (\log 4694715 - \log 7909110)$$

$$\begin{aligned} \log 4694715 &= 6{,}7716092 \\ \log 7909110 &= 6{,}8981277 \\ \hline & 0{,}7734815 - 1, \end{aligned}$$

oder $9{,}7734815 - 10 = \log (\sin p)^2$,

2) $9{,}8867407 = \log \sin p$,

daher $p = 50^\circ\, 23'\, 37''$ nördliche Polhöhe.

Für die Abweichung ist aus der anfänglichen Formel

$$\text{tg}\, d = \text{tg}\, 50^\circ\, 23'\, 37'' : \cos 62^\circ,$$

$$\begin{aligned} \log \text{tg}\, 50^\circ 23' 37'' &= 10{,}0822531 \\ \log \cos 62^\circ &= 9{,}6716093 \\ \hline & 10{,}4106438 = \log \text{tg}\, d, \end{aligned}$$

$$d = 68^\circ\, 47'\, 13''.$$

Da aber tg d negativ ist, so muß das Complement von d genommen werden. Es ist demnach

$d = 21^\circ\, 12'\, 47''$ als nördliche Abweichung.

59) An einem Orte und zur Zeit, als die Sonne in die Wage trat, fand man des Nachmittags ihre Höhe $= 46^\circ\, 2'$; 2 Stunden später war dieselbe $= 21^\circ\, 13'$. Man sucht die Polhöhe des Ortes und die Zeit der ersten Beobachtung.

Auflösung. Es sei der Stundenwinkel für die Zeit der ersten Beobachtung $= t$, also, da 2 Stunden Zeit 30 Grad geben, der Stundenwinkel der zweiten Beobachtung $= t + 30^\circ$.

Da nun die Abweichung der Sonne beim Eintritt in die Wage gleich Null ist, so verwandelt sich unsere allgemeine Gleichung

$$\sin h = \sin p \,.\, \sin d + \cos p \cos d \,.\, \cos t$$

in folgende: 1) $\sin h = \cos p \cos t$,

ferner ist 2) $\sin 21^\circ\, 13' = \cos p \,.\, \cos (t + 30^\circ)$.

Es sei, um einen allgemeinen Ausdruck zu erhalten, $21^\circ\, 13'$ oder die Sonnenhöhe der zweiten Beobachtung $= h'$, dann $30^\circ = c$, so ist

$$\begin{aligned} 3)\quad \sin h' &= \cos p \,.\, \cos (t + c) \\ &= \cos p (\cos t \,.\, \cos c - \sin t \sin c). \end{aligned}$$

Aus (1) folgt $\cos p = \frac{\sin h}{\cos t}$; und setzt man diesen Werth rechter Hand statt $\cos p$ in (3), so ergiebt sich durch Multiplikation beider Seiten mit $\cos t$,

$$(\sin h \cos c - \sin h') \cos t = \sin h \sin c \sin t,$$

also $$\frac{\sin h \cos c - \sin h'}{\sin h \sin c} = \frac{\sin t}{\cos t},$$

folglich
$$\operatorname{tg} t = \frac{\sin h \cos c}{\sin h \sin c} - \frac{\sin h'}{\sin h \sin c} = \cot c - \frac{\sin h'}{\sin h \sin c},$$

und wenn man die gegebenen numerischen Werthe wieder einsetzt,

$$\operatorname{tg} t = \cot 30^\circ - \frac{\sin 21^\circ 13'}{\sin 46^\circ 2' \sin 30^\circ},$$

$$\log \cot 30^\circ = 0{,}2385606, \quad \cot 30^\circ = 1{,}73205.$$

$$\log \sin 21^\circ 13' = 0{,}5585835 - 1$$

$$\log \sin 46^\circ 2' = 0{,}8571779 - 1$$
$$\log \sin 30^\circ = 0{,}6989700 - 1$$
$$0{,}5561479 - 1 = \log \sin 45^\circ 2' . \sin 30^\circ.$$

Abzug von $\log \sin 21^\circ 13' = 0{,}0024356$,

$$\frac{\sin 21^\circ 13'}{\sin 46^\circ 2' \sin 30^\circ} = 1{,}00562.$$

Also $\operatorname{tg} t = 1{,}73205 - 1{,}00562 = 0{,}72643$,

$$\log 0{,}72643 = 0{,}8611938 - 1,$$

und $\log \operatorname{tg} t = 9{,}8611938$,

$t = 35^\circ 59'$ und in Zeitmaß ausgedrückt $= 2$ Stunden 24 Min. als die Zeit der ersten Beobachtung.

Aus (1) ergiebt sich die Polhöhe $\cos p = \sin 46^\circ 2' : \cos 35^\circ 59'$.

Es ergiebt sich hieraus $p = 27^\circ 10' 30''$ als die Polhöhe, die sowohl südlich als nördlich sein kann.

60) An einem Orte und zur Zeit als die Sonne in das Zeichen des Widders trat, war ihre Höhe des Morgens um 9 Uhr 36 Minuten um $24^\circ 49'$ größer als ihre Höhe um 7 Uhr 36 Minuten. Man fragt nach der Polhöhe des Ortes.

Auflösung. Die bekannten Größen sind die Stundenwinkel, und die unbekannten die Höhen der Sonne nebst der Polhöhe des Ortes. Man bezeichne die kleinere Höhe früh um 7 Uhr 36 Min. mit x und den zugehörenden Stundenwinkel mit b, die größere Höhe mit $x + a$ und den entsprechenden Stundenwinkel mit c, so ist, da die Sonne in diesem Falle auch keine Abweichung hat,

$$1) \quad \sin x = \cos p \cos b,$$
$$\sin (x + a) = \cos p \cos c,$$

oder $$2) \quad \sin x . \cos a + \cos x \sin a = \cos p \cos c.$$

Man setze in die letzte Gleichung statt $\sin x$ seinen Werth aus (1), so folgt
$$\cos a \cos b \cos p + \sin a \cos x = \cos c \cos p,$$

daher 3) $\cos x = \frac{(\cos a \cos b - \cos c)}{\sin a} \cos p.$

Man erhebe nun die Gleichung (1) zum Quadrat, und nehme dann $1 - (\cos x)^2$ statt $\sin x^2$, so ist

$$(\cos x)^2 = 1 - (\cos b)^2 (\cos p)^2.$$

Man erhebe auch die Gleichung (3) zum Quadrat und eliminire aus beiden Gleichungen $(\cos x)^2$, so ist

$$\left(\frac{\cos a . \cos b - \cos c}{\sin a}\right)^2 (\cos p)^2 = 1 - (\cos b)^2 . (\cos p)^2,$$

oder wegen $\frac{\cos a}{\sin a} = \cot a,$

$$\left(\cot a \cos b - \frac{\cos c}{\sin a}\right)^2 (\cos p)^2 = 1 - (\cos b)^2 (\cos p)^2,$$

ferner $\left[\left(\cot a \cos b - \frac{\cos c}{\sin a}\right)^2 + (\cos b)^2\right] (\cos p)^2 = 1,$

endlich

$$\cos p = 1 : \sqrt{\left(\cot a \cos b - \frac{\cos c}{\sin a}\right)^2 + (\cos b)^2}.$$

Nun ist aus der Aufgabe

$a = 24^\circ 49',$

$b = 12$ St. $- 7$ St. 36 M. $= 4$ St. 24 M. $= (4\frac{2}{5}).15 = 66^\circ,$

$c = 12$ St. $- 9$ St. 36 M. $= 2$ St. 24 M. $= (2\frac{2}{5}).15 = 36^\circ.$

Setzen wir diese Werthe in die Formel, so ist

$$\cos p = 1 : \sqrt{\left(\cot 24^\circ 49' . \cos 66^\circ - \frac{\cos 36^\circ}{\sin 24^\circ 49'}\right)^2 + (\cos 66^\circ)^2}$$

$\log \cot 24^\circ 49' = 0{,}3849654$
$\log \cos 66^\circ = 0{,}6093133 - 1$ $\quad \log (\cos 66^\circ)^2 = 0{,}2186266 - 1$
$0{,}9942787 - 1$ $\quad (\cos 66^\circ)^2 = 0{,}16543$

$\cot 24^\circ 49' . \cos 66^\circ = 0{,}98691$

$\log \cos 36^\circ = 0{,}9079576 - 1$
$\log \sin 24^\circ 49' = 0{,}6229557 - 1$
$0{,}2850019$

$\cos 36^\circ . \sin 24^\circ 49' = 1{,}92756,$

$$0{,}98691 - 1{,}92756 = -1{,}04065$$

$$(-1{,}04065)^2 = 1{,}082952$$

$$1{,}082952 + 0{,}16543 = 1{,}248382$$

$$\cos p = 1 : \sqrt{1{,}248382} = \sqrt{\frac{1}{1{,}248382}}$$

$$\begin{array}{ll} \log 1 & = 0{,}0000000 \\ \log 1{,}248382 & = \underline{0{,}0963468} \\ & \ 1{,}9036532 - 2 \\ 2) & \ 0{,}9518266 - 1 \\ \log \cos p & = 9{,}9518266 \end{array}$$

$p = 26^\circ\, 29'\, 25''$ als nördliche oder südliche Polhöhe.

Kommt es noch darauf an, die Höhen der Sonne, x und $x + a$, zu bestimmen, so findet man dieselben, da a, b, c und p bekannt sind, nach den obigen Gleichungen:

$$\sin x = \cos p \,.\, \cos b; \qquad \sin x + a = \cos p \,.\, \cos c.$$

61) Von zwei Sternen A und B sei die gerade Aufsteigung des ersteren = 150° 50′ und nördliche Declination = 24° 14′; die gerade Aufsteigung des letzteren = 120° 20′ und nördliche Abweichung = 30° 20′. Man verlangt für eine nördliche Polhöhe von 50° 20′ den Culminations- und den Aufgangsunterschied beider Sterne.

Auflösung. Der Rectascensions-Unterschied zweier Sterne ist immer ihrem Culminations-Unterschiede gleich. Dieser Unterschied ist hier 150° 50′ — 120° 20′ = 30° 30′, welcher in Zeit verwandelt 2 Stunden 2 Minuten giebt. Nun culminirt von zwei Sternen derjenige früher, dessen gerade Aufsteigung kleiner als die des andern ist, wenn man die Zeit von dem Augenblicke an rechnet, wo der Frühlings-Nachtgleichenpunkt durch den Meridian geht.

Es sei also der Stundenwinkel des früheren Sterns $B = t$, und des späteren $A = t'$, so ist

$$1)\quad \cos t = -\operatorname{tg} 50^\circ\, 20' \,.\, \operatorname{tg} 30^\circ\, 20',$$

$$2)\quad \cos t' = -\operatorname{tg} 50^\circ\, 20' \,.\, \operatorname{tg} 24^\circ\, 14'.$$

Aus (1) folgt $\quad t = 122^\circ\, 52'\, 30'' = 8^h\ 11^m\ 30^s$

und aus (2) $\quad t' = 134^\circ\, 52'\, 50'' = 8^h\ 59^m\ 31^s$,

als die Zeiten vom Aufgange bis zur Culmination.

Nun war oben der Culminations-Unterschied = $2^h\ 2^m$; d. h. der Stern B culminirt 2 Stunden 2 Min. früher als A, und ging 8 Stunden 11 Min. 30 Sec. vorher auf. Der Unterschied des Aufganges beider Sterne oder die Zeit, um welche der Stern B früher als A aufgeht, ist demnach

$$2^h\ 2^m - (8^h\ 59^m\ 31^s - 8^h\ 11^m\ 30^s)$$

$$= 2^h\ 2^m - 8^h\ 59^m\ 31^s + 8^h\ 11^m\ 30^s = 1^h\ 13^m\ 59^s,$$

d. h. der Stern B geht 1 St. 13 Min. 59 Sec. oder beinahe 1 Stunde 14 Minuten früher als A auf.

Bezeichnet man allgemein den Rectascensions-Unterschied in Zeit ausgedrückt mit a, den Aufgangsunterschied mit u, so ist

$$u = a + t - t'$$

d. i. die Zeit, um welche der erste Stern früher als der zweite aufgeht.

Anmerkung. Die hier angenommene Zeit ist Sternzeit.

62) Die gerade Aufsteigung des Procyon ist $= 112^\circ\ 45'\ 7''$ und seine Abweichung $= 5^\circ\ 36'\ 10''$ nördlich; die gerade Aufsteigung des Arctur $= 214^\circ\ 13'$ und seine Declination $= 19^\circ\ 57'\ 37''$ nördlich. Um wie viel Zeit geht für Rom, dessen geographische Breite $= 41^\circ\ 53'\ 54''$ ist, der eine Stern früher als der andere auf, und wie viel beträgt der Aufgangsunterschied in Copenhagen, dessen Breite $= 55^\circ\ 40'\ 53''$ ist?

Auflösung. Wenn t der Stundenwinkel für Procyon und t' der für Arctur ist, so hat man für Rom

$$\cos t = -\operatorname{tg} 41^\circ\ 53'\ 54''.\ \operatorname{tg} 5^\circ\ 36'\ 10''$$

$$\cos t' = -\operatorname{tg} 41^\circ\ 53'\ 54''.\ \operatorname{tg} 19^\circ\ 57'\ 37''.$$

Aus beiden Gleichungen folgt

$$t = 95^\circ\ 2'\ 58'' = 6^h\ 20^m\ 12^s$$

$$t' = 109^\circ\ 1'\ 1'' = 7^h\ 16^m;$$

der Rectascensionsunterschied beider Sterne ist

$$= 214^\circ\ 13' - 112^\circ\ 45' = 6^h\ 43^m\ 52^s;$$

also nach der Formel voriger Aufgabe:

$$u = a + t - t',$$

ergiebt sich

$$u = 6^h\ 43^m\ 52^s + 6^h\ 20^m\ 12^s - 7^h\ 16^m$$
$$= 5^h\ 48^m\ 4^s.$$

Für Copenhagen ist

$$\cos t = -\operatorname{tg} 55^\circ\ 40'\ 53''.\ \operatorname{tg} 5^\circ\ 36'\ 10''$$

$$\cos t' = -\operatorname{tg} 55^\circ\ 40'\ 53''.\ \operatorname{tg} 19^\circ\ 57'\ 37'';$$

daraus folgt

$$t = 98^\circ\ 15'\ 45'' = 6^h\ 33^m\ 9^s$$

$$t' = 122^\circ\ 8'\ 36'' = 8^h\ 8^m\ 34^s;$$

also $u = 5^h\ 8^m\ 27^s.$

Procyon geht demnach für Rom 5 St. 48 Min. 4 Sec., und für Copenhagen 5 St. 8 Min. 27 Sec. früher als Arctur auf.

63) Wie viel beträgt für Gotha, dessen Polhöhe $= 50^\circ\ 56'\ 5''$ ist, der Aufgangsunterschied zwischen den Sternen Rigel und Wega, wenn des ersteren Rectascension $5^h\ 7^m\ 22^s$ und südliche Abweichung $8^\circ\ 22'\ 41''$, dann die Rectascension des letzteren $18^h\ 31^m\ 53^s$ und nördliche Abweichung $38^\circ\ 38'\ 52''$ beträgt?

Die Gleichungen sind

$$\cos t = +\operatorname{tg} 50^\circ\ 56'\ 5''.\ \operatorname{tg} 8^\circ\ 22'\ 11''$$
$$\cos t' = -\operatorname{tg} 50^\circ\ 56'\ 5''.\ \operatorname{tg} 38^\circ\ 38'\ 52''.$$

Nach gehöriger Ausführung der Rechnung findet man

$$u = 12^h\ 3^m\ 9^s.$$

64) Von zwei Orten A und B, die auf einerlei Meridian liegen, sei die Polhöhe des ersteren = 30 Grad und des letzteren = 60 Grad, und zwar beide nördlich. Es gehe ein Stern auf, dessen nördliche Declination = 16° 20′ sei; wie viel eher sieht ihn der eine Ort aufgehen als der andere?

Auflösung. Für den Ort A sei der Stundenwinkel = t und für den Ort B = t′, so ist

$$\cos t = -\mathrm{tg}\, 30^\circ \;\mathrm{tg}\, 16^\circ 20', \quad \cos t' = -\mathrm{tg}\, 60^\circ \;\mathrm{tg}\, 60^\circ 20'.$$

$$\log \mathrm{tg}\, 30^\circ = 9{,}7614394$$
$$\log \mathrm{tg}\, 16^\circ 20' = 9{,}4669448$$
$$9{,}2283842 = \log \cos t$$
$$t = 99^\circ 44' 27'' = 6^h\, 38^m\, 58^s$$
$$\log \mathrm{tg}\, 60^\circ = 10{,}2385606$$
$$\log \mathrm{tg}\, 16^\circ 20' = 9{,}4669448$$
$$9{,}7055054 = \log \cos t'$$
$$t' = 120^\circ 30' 12'' = 8^h\, 2^m\, 1^s,$$
$$t' - t = 1^h\, 23^m\, 3^s.$$

Der Ort A sieht also den Stern bei seinem Aufgange 1 St. 23 Min. später als B, nämlich nach Sternzeit.

Allgemeine Bemerkung. Hätte der Stern statt seiner nördlichen Declination eine gleichgroße südliche, so würde sein

$$t = 80^\circ 44' 27'' = 5^h\, 21^m\, 2^s$$
$$t' = 59^\circ 29' 48'' = 3^h\, 58^m\, 59^s$$
$$\text{Unterschied} = 1^h\, 22^m\, 3^s.$$

Es findet also hier das Umgekehrte statt, d. h. der Stern geht jetzt für A um 1 St. 22 Min. 3 Sec. früher als für B auf.

65) Die geographische Breite eines Ortes A sei 35 Grad nördlich und seine geographische Länge = 170 Grad; die nördliche Breite eines Ortes B sei = 58 Grad und Länge = 65 Grad, beide Längen von der Insel Ferro nach Osten gerechnet. Um wie viel Zeit wird ein Stern, dessen nördliche Declination 10° 50′ beträgt, für den einen Ort früher als für den andern aufgehen?

Auflösung. Der Stundenwinkel für den Ort A sei = t, der für B sei = t′, so ist

$$\cos t = -\mathrm{tg}\, 35^\circ .\, \mathrm{tg}\, 10^\circ 50'; \quad \cos t' = -\mathrm{tg}\, 58^\circ .\, \mathrm{tg}\, 10^\circ 50';$$

daraus folgt

$$t = 97^\circ 42' 2'' = 6^h\, 50^m\, 48^s$$
$$t' = 107^\circ 50' = 7^h\, 11^m\, 20^s$$
$$\text{Zeitunterschied } t' - t = 20^m\, 32^s.$$

Diese Zeit würde der Aufgangsunterschied für beide Orte sein, wenn sie gleiche Länge hätten; da dies hier aber nicht der Fall ist, so muß der

Längenunterschied beider Orte noch mit in Betracht gezogen werden. Dieser ist 170° — 65° = 105°, und auf Zeit reducirt = 7 Stunden.

Von diesem Längenunterschied muß obige Differenz t' — t abgezogen oder dazu addirt werden, je nachdem t' oder t größer ist. Es ist also für unser Beispiel

$$7^h - 20^m 32^s = 6^h 39^m 24^s.$$

Der westliche Ort B sieht demnach den Stern bei seinem Aufgange 6 St. 39 Min. 24 Sec. später als der Ort A.

Es sei allgemein der Längenunterschied zweier Orte = l, der Aufgangsunterschied des Sterns für beide Orte = u', der Stundenwinkel des östlichen Ortes = t und des westlichen = t', so ist auf ähnliche Art wie in Aufgabe 61

$$u' = l + t - t'.$$

66) Wie viel früher oder später wird der helle Stern Alpha Orionis, dessen nördliche Declination 7° 22' 28" beträgt, für Rom oder für Dorpat aufgehen?

Die geographische Breite Roms beträgt 41° 53' 54" und Länge 30° 8' 18"; die geographische Breite von Dorpat 58° 22' 47" und Länge 44° 23' 22", beide Längen von der Insel Ferro nach Osten gerechnet.

Auflösung. Es sei der Stundenwinkel für Dorpat als den östlicheren Ort = t und für Rom = t', so ist

$$\cos t = -\operatorname{tg} 58^\circ 22' 47'' . \operatorname{tg} 7^\circ 22' 28'';$$
$$\cos t' = -\operatorname{tg} 41^\circ 53' 54'' . \operatorname{tg} 7^\circ 22' 28''.$$

Der Längenunterschied ist

$$l = 44^\circ 23' 22'' - 30^\circ 8' 18'' = 14^\circ 15' 4'' = 57^m 16^s.$$

Man findet $t = 6^h 48^m$, $t' = 6^h 26^m 39^s$,

$$u' = 57^m 16^s + 6^h 48^m - 6^h 26^m 39^s = 1^h 18^m 37^s.$$

In Dorpat sieht man diesen Stern um so viel früher aufgehen.

67) Die Polhöhe von Copenhagen ist = 55° 40' 53" nördlich; Länge = 30° 14' 34"; die Polhöhe von Paramatta = 33° 48' 49" südlich und Länge = 168° 41' 12", beide Längen von der Insel Ferro nach Osten gerechnet. Wie viel beträgt für beide Städte der Aufgangsunterschied des hellen Sterns Sirius im Sternbilde des großen Hundes, dessen Abweichung = 16° 30' 57" südlich ist?

Auflösung. Bezeichnet t den Stundenwinkel für Paramatta, t' den für Copenhagen, so sind die Gleichungen

$$\cos t = -\operatorname{tg} 33^\circ 48' 49'' . \operatorname{tg} 16^\circ 30' 57'';$$
$$\cos t' = +\operatorname{tg} 55^\circ 40' 53'' . \operatorname{tg} 16^\circ 30' 57'';$$
$$l = 168^\circ 41' 12'' - 30^\circ 14' 34'' = 138^\circ 26' 38'' = 9^h 13^m 46^s.$$

Man erhält

$$t = 101^\circ 27' 18'' = 6^h 45^m 49^s; \quad t' = 64^\circ 15' 19'' = 4^h 17^m.$$

Aufgangsunterschied

$$u' = 9^h 13^m 46^s + 6^h 45^m 49^s - 4^h 17^m = 11^h 2^m 35^s \text{ Sternzeit.}$$

Rechnet man die Culminationszeit oder die Aufgangszeit des Sterns vom Anfange des Sterntages an, so geht derselbe für Paramatta 11 St. 2 M. 35 Sec. früher als für Copenhagen auf. Wird hingegen diese Zeit vom Anfang des Sonnentags, übrigens gleichviel, ob von Mittag oder Mitternacht an gezählt, so kann auch der Fall vorkommen, daß der Stern für Copenhagen und zwar um $12^h - 11^h\,2^m\,35^s = 12^h\,57^m\,25^s$ früher d. i. am vorhergehenden Tage aufgeht.

68) Der Längenunterschied zweier Orte A und B, von denen A gegen B östlicher liegt, beträgt 9° 15′, die geographische Breite des Ortes A ist = 59° 20′ nördlich, und die des Ortes B = 53° 43′ ebenfalls nördlich. Es wird gefragt, an welchen Tagen die Sonne beiden Orten zugleich auf und an welchen sie ihnen zugleich untergeht.

Auflösung. Es sei allgemein die geographische Breite des östlichen Ortes A = p, der zugehörende Stundenwinkel = t, die Breite des westlichen Ortes B = q und der entsprechende Stundenwinkel = t′, endlich die Abweichung der Sonne = d, so ist

$$1)\quad \cos t = -\operatorname{tg} p . \operatorname{tg} d; \qquad 2)\quad \cos t' = -\operatorname{tg} q . \operatorname{tg} d.$$

Soll nun die Sonne beiden Orten zugleich aufgehen, so muß in der Gleichung

$$u' = l + t - t'$$

der Aufgangsunterschied $u' = 0$ werden, also

$$l + t - t' = 0 \quad \text{oder} \quad t' = l + t.$$

Dann ist noch nöthig, die Länge der Sonne an erwähnten Tagen zu kennen, welche leicht gefunden werden kann, sobald d bekannt ist.

Man setze in der Gleichung (2) den Werth $l + t$ statt t', so ist

$$\cos (l + t) = -\operatorname{tg} q \operatorname{tg} d,$$

oder wegen $\cos (l + t) = \cos l \cos t - \sin l \sin t$,

ist $\cos l \cos t - \sin l \sin t = -\operatorname{tg} q \operatorname{tg} d.$

Ferner substituire man in dieser Gleichung statt cos t seinen Werth aus (1), so ergiebt sich, wenn man zugleich die Zeichen in die entgegengesetzten verwandelt,

$$\operatorname{tg} p \operatorname{tg} d + \sin l \sin t = \operatorname{tg} q \operatorname{tg} d,$$

also $$3)\quad \sin l . \sin t = (\operatorname{tg} q - \operatorname{tg} p) \operatorname{tg} d.$$

Man erhebe diese Gleichung sowohl, wie die obige (1) ins Quadrat, setze aber $1 - \sin^2 t$ statt $\cos^2 t$ und eliminire durch Verbindung beider Gleichungen die Größe $\sin^2 t$, so folgt nach gehöriger Ausführung

$$\operatorname{tg} d = 1 : \sqrt{\left(\frac{\operatorname{tg} q}{\sin l} - \cot l \operatorname{tg} p\right)^2 + (\operatorname{tg} p)^2}.$$

Nun ist nach den Bedingungen der Aufgabe

$$p = 59^\circ 20', \quad q = 53^\circ 43', \quad l = 9^\circ 15',$$

also ist die Rechnung

$$\log \operatorname{tg} q = 0{,}1342298 \qquad \log \operatorname{tg} p = 0{,}2269673$$
$$\log \sin l = 0{,}2061309 - 1 \qquad \log \cot l = 0{,}7881847$$
$$\overline{0{,}9280989} \qquad \overline{1{,}0151520}$$

$$\frac{\operatorname{tg} q}{\sin l} = 8{,}47438 \qquad \cot l \operatorname{tg} p = 10{,}355$$

$$(8{,}47438 - 10{,}355)^2 = (1{,}88062)^2 = 3{,}5372$$

$$\log (\operatorname{tg} p)^2 = 2 \log \operatorname{tg} p = 0{,}4539346$$

$$(\operatorname{tg} p)^2 = 2{,}8441$$

also $$3{,}5372 + 2{,}8441 = 6{,}3813,$$

daher $$\operatorname{tg} d = \frac{1}{\sqrt{6{,}3813}},$$

woraus folgt $d = 21^\circ\, 35'\, 48''$ als die Abweichung der Sonne.

Die Länge findet man bekanntlich aus der Formel $\sin l' = \sin d : \sin e$, also ist hier $\sin l' = \sin 21^\circ\, 35'\, 48'' : \sin 23^\circ\, 27'\, 30''$.

Vermöge der allgemeinen Bemerkung Seite 233 entsprechen aber der Abweichung vier verschiedene Werthe der Länge, welche nach der allgemeinen Bemerkung Seite 237 folgende sind:

$$l' = 67^\circ\, 36'\, 6'' = 2s \quad 7^\circ\, 36'\, 6''$$
$$l' = 112^\circ\, 23'\, 54'' = 3s \quad 22^\circ\, 23'\, 54''$$
$$l' = 247^\circ\, 36'\, 6'' = 8s \quad 7^\circ\, 36'\, 6''$$
$$l' = 292^\circ\, 23'\, 54'' = 9s \quad 22^\circ\, 23'\, 54'',$$

wo $s = 30^\circ$ ist und signum (himmlisches Zeichen) heißt.

Die Sonne geht also beiden Orten zugleich auf, wenn sie $7^\circ\, 36'\, 6''$ im Schützen, und $22^\circ\, 23'\, 54''$ im Steinbock ist; und sie geht beiden Orten zugleich unter, wenn sie $8^\circ\, 36'\, 6''$ in den Zwillingen, und $22^\circ\, 23'\, 54''$ im Krebs ist. (Vergl. Zusätze.)

69) An einem Orte sahe man zwei Sterne 30 Minuten nach einander aufgehen. Des ersten Sterns gerade Aufsteigung war $= 125^\circ\, 15'$ und nördliche Declination $= 15^\circ\, 18'$; des zweiten Sterns gerade Aufsteigung $= 154^\circ\, 18'$ und südliche Declination $= 24^\circ\, 13'$. Wie viel beträgt die Polhöhe des Ortes?

Auflösung. Es sei der Stundenwinkel des ersteren oder früheren Sterns $= t$ und seine Declination $= d$, der Stundenwinkel des letzteren $= t'$ und seine Declination $= c$, so ist

$$1) \quad \cos t = -\operatorname{tg} p \operatorname{tg} d; \qquad 2) \quad \cos t' = +\operatorname{tg} p \operatorname{tg} c.$$

Nun ist aus Aufgabe 6 der Aufgangsunterschied beider Sterne

$$u = a + t - t', \qquad \text{also} \qquad t' = a - u + t.$$

Diesen Werth rechter Hand setze man statt t' in die Gleichung (2), so erhält man

$$\cos(a - u + t) = \cos(a - u) \cos t - \sin(a - u) \sin t = \operatorname{tg} p \operatorname{tg} c.$$

Aus dieser Gleichung und aus (1) eliminire man auf ähnliche Art wie in vorhergehender Aufgabe die Größen sin t, cos t, und bestimme eine Gleichung für lang p, so erhält man nach erforderlicher Entwickelung den Ausdruck

$$\operatorname{tg} p = 1 : \sqrt{\left(\cot(a-u)\operatorname{tg} d + \frac{\operatorname{tg} c}{\sin(a-u)}\right)^2 + (\operatorname{tg} d)^2}.$$

Nun ist hier $d = 15^\circ\,18'$, $c = 24^\circ\,13'$,

$$a = 154^\circ\,18' - 125^\circ\,15' = 29^\circ\,3', \quad u = 30^m = 7^\circ\,30',$$

also $a - u = 21^\circ\,33'$.

Setzt man diese Werthe an ihre gehörige Stelle und führt die Rechnung aus, so erhält man

$$\operatorname{tg} p = 1 : \sqrt{3{,}75044},$$

folglich $p = 27^\circ\,18'\,37$ als die verlangte Polhöhe.

Um zu entscheiden, ob die Polhöhe p nördlich oder südlich sei, müssen wir untersuchen, welcher von den beiden Stundenwinkeln t und t' der größte wird. Nehmen wir p nördlich, so behalten obige Gleichungen (1) und (2) ihr Vorzeichen, und wir erhalten sonach

$$t = 80^\circ\,7'\,15'', \qquad t' = 76^\circ\,34'\,14''.$$

Betrachten wir aber p als südlich, so gehen jene Zeichen in die entgegengesetzten über, und es wird jetzt

$$t = 80^\circ\,7'\,15'', \qquad t' = 103^\circ\,25'\,46''.$$

Die Polhöhe p ist daher südlich.

70) Einst ging die Sonne des Abends um 8 Uhr unter, und zwar war ihre nördliche Abendweite doppelt so groß, als ihre Abweichung zu selbiger Zeit. Man sucht die Polhöhe des Orts und die Abweichung der Sonne.

Auflösung. Unter diesen Umständen versteht es sich von selbst, daß die Polhöhe wie die Abweichung der Sonne nördlich sein müssen.

Es ist in dem sphärischen Dreiecke z k p (Fig. 192, S. 256)

$$\sin kzp : \sin zpk = \sin pk : \sin zk.$$

Nun ist, wenn a q den Aequator und h r den Horizont vorstellt,

$$kzp = 90^\circ + n = 90^\circ + 2d, \quad zpk = t, \quad pk = 90^\circ - d,$$

wo n die Abendweite, d die Abweichung und t den Stundenwinkel der Sonne bezeichnen; ferner ist, da der Stern im Horizonte liegt, $zk = 90^\circ$, also

$$\sin(90^\circ + 2d) : \sin t = \sin(90^\circ - d) : 1,$$

folglich wegen $\sin(90^\circ + 2d) = \cos 2d$,

$$\cos 2d = \sin t \cos d.$$

Da nun $\cos 2d = \cos^2 d - \sin^2 d = 2\cos^2 d - 1$ ist, so ergiebt sich die Gleichung

$$\cos d = \tfrac{1}{4}\sin t \pm \sqrt{\tfrac{1}{2} + (\tfrac{1}{4}\sin t)^2}.$$

Nun ist $t = 8.15 = 120^\circ$, also $\sin t = \sin 60^\circ$, folglich

$$\cos d = \tfrac{1}{4}\sin 60^\circ + \sqrt{\tfrac{1}{2} + (\tfrac{1}{4}\sin 60^\circ)^2}.$$

Die Ausführung der Rechnung liefert

$$d = 17^\circ\, 3'\, 30''.$$

Die Polhöhe p findet man alsdann aus der Formel $\cos t = -\,\mathrm{tg}\, p\ \mathrm{tg}\, d$, woraus man erhält

$$p = 58^\circ\, 28'.$$

71) An einem Orte sahe man die Sterne Cauda im Löwen und Spica in der Jungfrau zugleich am Horizonte in ihrem Untergange. Wenn nun die gerade Aufsteigung des ersteren Sterns = 173° 33′ und nördliche Declination = 16° 45′, dann die gerade Aufsteigung der Spica = 197° 28′ und südliche Declination = 9° 36′ gegeben sind, wie findet man die Polhöhe des Ortes und das Azimuth der Sterne?

Auflösung. Die Polhöhe findet man nach der Formel vorhergehender Aufgabe, wenn man darin $u = 0$ setzt, woraus man erhalten wird

$$p = 41^\circ\, 21' \text{ nördlich}.$$

Das Azimuth ergiebt sich entweder aus einer der Formeln in Aufgabe 42, wenn man darin $z = 90^\circ$ setzt, oder durch die einfache Proportion

$$\sin pzk : \sin zpk = \sin kp : \sin zk \quad \text{(Fig. 192)}$$

d. i. $\sin m : \sin t = \cos d : 1,$

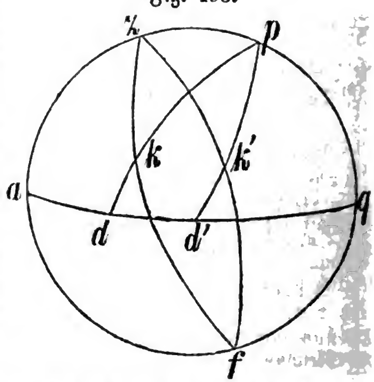
(wegen $zk = 90^\circ$).

also $\sin m = \cos d \sin t.$

Das Azimuth des ersteren Sterns ist = 112° 35′, und das der Spica = 77° 10′.

72) Aus den beobachteten beiden Durchgangszeiten eines Sterns von bekannter Declination durch denselben Vertikalkreis die Polhöhe des Orts zu finden.

Fig. 193.



Auflös. Es sei (Fig. 193) aq der Aequator, p sein Pol, z das Zenith des Beobachtungsortes, in k ein Stern bei der ersten und in k′ derselbe Stern bei der zweiten Beobachtung. Man lege durch den Stern bei k den Scheitelkreis zkf und den Abweichungskreis pd, ingleichen durch denselben Stern bei k′ den Scheitelkreis zk′f und den Abweichungskreis pd′, so ist kd = k′d die Declination des Sterns und zp das Complement der Polhöhe des Orts. Ferner ist in den Dreiecken kzp, k′zp der Winkel kzp das Azimuth m des Sterns bei k, und k′zp das Azimuth m′ des Sterns bei k′. Es ist aber, da die zweite Beobachtung 24 Stunden später geschieht, $m' = 24.15^\circ - m = 360^\circ - m$; ferner ist zpk der Stundenwinkel t für k, und zpk′ oder t′ der für k′.

Nun ist nach der Gleichung (12) Seite 207, wenn dort gesetzt wird $A = pzk$, $B = zpk$, $a = pk$, $c = pz$,

1) $\cot pzk . \sin zpk = \cot pk \sin pz - \cos pz . \cos zpk$,
oder $\cot m . \sin t =$
$\cot (90^\circ - d) \sin (90^\circ - p) - \cos (90^\circ - p') . \cos t$,

2) $\cot pzk' . \sin zpk' = \cot pk' \sin pz - \cos pz \cos zpk'$,
oder $\cot (360^\circ - m) \sin t' =$
$\cot (90^\circ - d) \sin (90^\circ - p) - \cos (90^\circ - p') \cos t'$;

und wegen $\cot (90^\circ - d) = \operatorname{tg} d$, $\cot (360^\circ - m) = - \cot m$ u. s. f. folgt aus (1)

$$\cot m = \frac{\operatorname{tg} d . \cos p - \sin p' \cos t}{\sin t},$$

aus (2)

$$\cot m = \frac{- \operatorname{tg} d \cos p + \sin p' . \cos t'}{\sin t'}.$$

Man setze beide Werthe rechter Hand einander gleich, so ist

$$\frac{\operatorname{tg} d \cos p - \sin p' \cos t}{\sin t} = \frac{- \operatorname{tg} d \cos p + \sin p' \cos t'}{\sin t'}$$

oder, wenn man durchgängig durch $\cos p$ dividirt,

$$\frac{\operatorname{tg} d - \operatorname{tg} p \cos t}{\sin t} = \frac{- \operatorname{tg} d + \operatorname{tg} p \cos t'}{\sin t'}.$$

Ferner ist nach weiterer Ausführung

3) $(\sin t + \sin t') \operatorname{tg} d = \sin (t + t') \operatorname{tg} p.$

Nun ist nach § 249, Seite 163,

$$\sin (t + t') = 2 \sin \tfrac{1}{2} (t + t') . \cos \tfrac{1}{2} t + t').$$

Ferner nach Formel (1) § 255, Seite 165,

$$\sin t + \sin t' = 2 \sin \tfrac{1}{2} (t + t') . \cos \tfrac{1}{2} (t - t').$$

Die Einsetzung dieser Werthe in die Gleichung (3) giebt endlich, da der Factor $\sin \frac{1}{2} (t + t')$ aus derselben wegfällt,

$$\operatorname{tg} p = \frac{\cos \frac{1}{2} (t - t')}{\cos \frac{1}{2} (t + t')} . \operatorname{tg} d.$$

73) An einem Orte von bekannter Polhöhe aus der geraden Aufsteigung und Abweichung die Sonne an einem gegebenen Tage und der geraden Aufsteigung und Abweichung irgend eines Sterns die Zeit seines Auf- und Unterganges nebst seiner Culmination an genanntem Tage zu bestimmen.

Auflösung. Man suche zunächst den Stundenwinkel der Sonne und des Sterns nach den bekannten Formeln $\cos t = - \operatorname{tg} p \operatorname{tg} d$, $\cos t' = - \operatorname{tg} p \operatorname{tg} c$. Dann bestimme man nach Aufgabe 61 (Seite 271) den Aufgangs- und Untergangs-Unterschied u und u' beider Gestirne,

$$u = a + t - t', \quad u' = a + t' - t,$$

wo t den Stundenwinkel der Sonne, t' den des Sterns und a den Rectascensions-Unterschied beider Gestirne bezeichnet.

Bedeutet ferner 12 U. so viel als um 12 Uhr Mittags, so ist

$12\ U. - t$ . . . . Aufgang der Sonne.

$12\ U. + t$ . . . . Untergang der Sonne.

$$12\ U. - t + u = 12\ U. - t + (a + t - t')$$

d. i. 1) $12\ U. + a - t'$ . . . . . Aufgang des Sterns,

2) $12\ U. + a$ . . . . Culmination des Sterns.

$$12\ U. + t + u' = 12\ U. + t + (a + t' - t)$$

d. i. 3) $12\ U. + a + t'$ . . . . . Untergang des Sterns.

Anmerkung 1. Die Größen a, t und t' zeigen, wie aus früheren Aufgaben bekannt ist, Stunden oder Theile von Stunden, und überdieß a und t' Sternzeit an. Diese Sternzeit ist dann in mittlere Sonnenzeit zu verwandeln; und da der Sterntag ungefähr um 4 Minuten kürzer ist, als der mittlere Sonnentag, so hat man für jede Stunde von obigen Werthen $a - t'$, a, $a + t$, 4 Minuten abzuziehen, oder dieselben mit $\frac{14}{15}$ zu multipliciren.

Ist die gerade Aufsteigung der Sonne der des Sternes gleich, so ist $a = 0$, die Gleichung (2) zeigt dann, daß beide Gestirne zugleich culminiren.

Anmerkung 2. Da in den letzten drei Gleichungen der Stundenwinkel t der Sonne weggefallen ist, so wird unsere Aufgabe auf folgende einfachere zurückgeführt:

An einem Orte von bekannter Polhöhe aus der Rectascension der Sonne an einem gegebenen Tage und der Rectascension eines Sterns nebst der Abweichung des letzteren die Zeit seines Auf- und Unterganges nebst seiner Culmination zu bestimmen.

74) Wann wird Sirius, dessen gerade Aufsteigung $6^h\,38^m\,35^s$ und südliche Declination $16^\circ\,30'\,57''$ beträgt, am 1. Januar für Hamburg aufgehen, culminiren und untergehen, da an diesem Tage die gerade Aufsteigung der Sonne $= 18^h\,46^m\,49^s$ ist?

Auflösung. Es ist $a = 18^h\,46^m\,49^s - 6^h\,38^m\,35^s = 12^h\,8^m\,14^s$. Ferner erhält man, da die Polhöhe Hamburgs $= 53^\circ\,33'$ ist, aus der Gleichung

$$\cos t = + \operatorname{tg} 53^\circ\,33' . \operatorname{tg} 16^\circ\,30'\,57''$$

nach gehöriger Ausführung den Werth

$$t' = 66^\circ\,19'\,40'' = 4^h\,25^m\,19^s.$$

Also

$$(a - t') = (12^h 8^m 14^s - 4^h 25^m 19^s)\tfrac{14}{15} = (7^h 42^m 54^s)\tfrac{14}{15} = 7^h\,12^m$$

$$a = (12^h 8^m 14^s)\tfrac{14}{15} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ 11^h\,19^m\,40^s$$

$$a + t' = (12^h 8^m 14^s + 4^h 25^m 19^s)\tfrac{14}{15} = (16^h 33^m 33^s)\tfrac{14}{15} = 15^h\,27^m\,18^s$$

Der Aufgang des Sirius ist demnach Abends um 7 Uhr $19\frac{2}{3}$ Min., die Culmination um 11 Uhr $27\frac{1}{3}$ Min., und der Untergang Morgens um 3 Uhr $27\frac{1}{3}$ Min.

Anmerkung. In den drei Gleichungen vorhergehender Aufgabe können die Bezeichnungen: 12 U., weggelassen werden.

75) Um welche Zeit wird Gemma in der Krone am 1. October für Hamburg aufgehen, culminiren und untergehen?

Die gerade Aufsteigung des Sterns ist $= 15^h\ 28^m\ 20^s$ und nördliche Declination $= 27^\circ\ 13'\ 20''$, und die gerade Aufsteigung der Sonne am 1. October $= 12^h\ 29^m$.

Auflösung. Aus der Gleichung

$$\cos t' = -\operatorname{tg} 53^\circ 33' . \operatorname{tg} 27^\circ 13' 20''$$

folgt

$$t' = 134^\circ 7'' 40' = 9^h\ 24^m.$$

Ferner ist nun

$$a = 15^h\ 28^m\ 20^s - 12^h\ 29^m = +\ 2^h\ 59^m\ 20^s$$
$$a - t' = 2^h\ 59^m\ 20^s - 9^h\ 24^m = -\ 6^h\ 24^m\ 40^s$$
$$a + t' = 2^h\ 59^m\ 20^s + 9^h\ 24^m = +\ 12^h\ 23^m\ 20^s$$

Die Verwandlung dieser Sternzeit in mittlere Sonnenzeit giebt

$$a - t' = -\ (6^h\ 24^m\ 20^s)\ \tfrac{1}{1\delta} = -\ 5^h\ 58^m\ 26^s \text{ Aufgang,}$$
$$a = +\ (2^h\ 59^m\ 20^s)\ \tfrac{1}{1\delta} = +\ 2^h\ 47^m\ 40^s \text{ Culmination,}$$
$$a + t' = +\ (12^h\ 23^m\ 20^s)\ \tfrac{1}{1\delta} = +\ 11^h\ 33^m\ 30^s \text{ Untergang.}$$

Der negative Werth des Aufganges zeigt an, daß die Sonne dem Sterne voreilt. Der Stern geht demnach auf Morgens um 5 U. 58½ M., culminirt Nachmittags um 2 Uhr 47⅔ Min. und geht unter Abends um 11 Uhr 33½ Min.

Berichtigungen.

Seite 3 ist zwischen Zeile 4 und 5 folgender Satz einzuschalten: Wenn die Linie e c (Fig. 2) zu c d oder c a gar keine Neigung hat, so sagt man, daß sie auf beiden Linien oder auf a d senkrecht steht. In diesem Fall heißt der Winkel, den sie mit c d oder c a bildet, ein rechter; ist der Winkel kleiner als ein rechter, wie b c d, so wird er ein spitzer, und ist er größer als ein rechter, wie a c b, so wird er ein stumpfer genannt.
„ 21, Zeile 4, statt: einen, lies: eine.
„ 31, „ 10, „ auf gleichen Bogen, lies: auf demselben und gleichen Bogen.
„ 34, Zeile 8 u. 9 lies: Man lege an die Linie a b den Winkel k.
„ 35, fehlt in der Mitte der Figur 72 ein c.
„ 42, soll die Anmerkung zu Ende heißen: Aus zwei gegebenen Linien die mittlere Proportionale zu finden, siehe Aufgabe 14, Seite 67.
„ 57, Zeile 3, statt: richtigen, lies: wichtigen.
„ 66, fehlt in der Figur 118 ein e auf b d und ein h auf a b.
„ 66, fehlt in der Figur 119 ein e auf c d.
„ 71, fehlt in der Figur 127 die Linie b c.
„ 81, Zeile 4, lies: 57° 19′ 29,″3... = 206369,4...
„ 104, „ 4 v. u., statt: Cubikzoll, lies: Cubikfuß.
„ 130, erste Zeile der Ueberschrift, statt: ein, lies: eines.

S. 131, Zeile 7, statt: $+ r^2 \pi$, lies: $4 r^2 \pi$.

„ 133, letzte Zeile ist der Ausdruck rechter Hand zu schreiben $\frac{2 \sqrt{4\pi}}{3\pi}$.

„ 134, Zeile 2, statt: $\frac{4}{3} \pi^3 \pi$, lies: $\frac{4}{3} R^3 \pi$.

„ 134, „ 3, unter dem Wurzelzeichen, statt: $\frac{3}{4}$, lies: $\frac{1}{4}$.

„ 136, „ 24, zu Anfang, statt: r^3, lies: r^2.

„ 139, „ 7 v. unten, statt: dritten, lies: andern.

„ 159 und 160 sind die Beispiele 1 und 2 zu verwechseln.

„ 163, Zeile 2 ist vom zweiten Comma an zu lesen: wenn man die dadurch jedesmal erhaltenen Werthe in die nächstfolgende Gleichung substituirt.

„ 168, Zeile 9 v. unten, statt: Einfachheit, lies: Einheit.

„ 183, „ 2, statt: $70.5^2.3{,}60$, lies: $70.5^2.3{,}14 : 360$.

„ 185, fehlt in der Figur 178, wo b c den Kreis schneidet, ein **a**.

„ 205, 5ter Satz, fehlt unter dem Wurzelzeichen im Zähler vor dem einen Factor $\sin \frac{1}{2}$.

„ 211, Zeile 16, muß vor sin c, statt eines Comma, ein Punkt stehen.

„ 211, „ 18, Formel V. schreibe $\operatorname{tg} b = \sin c \operatorname{tg} B$.

„ 219, „ 12 v. u., nach dem Comma schalte ein: und zu sehen.

„ 233, „ 6, statt: 160°, lies: 196°.

„ 233, „ 8 v. unten, ließ: also negativ wird; dieselbe nimmt.

„ 235, „ 14 v. unten, statt: Colus, lies: Colur.

„ 236, „ 1 u. 2 ist im Nenner statt $-c$ zu schreiben $+c$.

„ 241, „ 24, statt: Absteigungen, lies: Aufsteigungen.

„ 244, „ 11 v. unten, fehlt vor dem Gleichheitszeichen ein a.

„ 244, „ 10 v. unten, lies: Rectascension.

„ 248, „ 3 v. oben, statt: Ort, lies: Orts.

„ 248, „ 26 „ „ statt: p m b, lies: p m.

„ 248, „ 9 v. unten, im Ausdruck rechter Hand statt eines Comma setze eine Punkt.

„ 250, Zeile 18 von oben, statt: Durch, lies: Zur.

„ 253, „ 2, setze nach Ecliptik: gleich.

„ 255, „ 10 von unten, lies: Stundenwinkel.

„ 262, „ 4, lies: 25° 43′ 6″, u. Zeile 5, statt: 46° 45′ 22″ nahe, l.: 90°.*)

„ 263, „ 18, statt: tg c m, lies: cot c m, und ändere die folgenden Ausdrücke danach ab.

„ 264, Zeile 4, lies: Aufgabe, und Zeile 11, lies: Aequator.

„ 264, „ 13, statt: l, lies: l′.

„ 281, im letzten Satz nach dem Comma lies: daß der Stern der Sonne voreilt.

---

*) Eine Höhe von 90°, welche also bis zum Zenith reicht, entspricht jedem beliebigen Punkte des Horizonts als Anfangspunkte. Dieser Fall gehört demnach zu den unbestimmten.

Zusätze. Seite III, Zeile 13, ist zu streichen: gerade.

„ III, „ 4 v. u., statt t, lies: 2 t, u. vergl. Aufg. 24.

